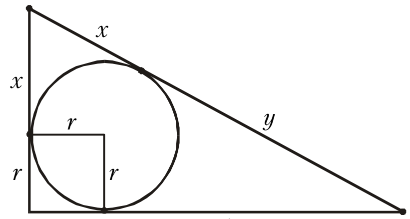

Рис.2

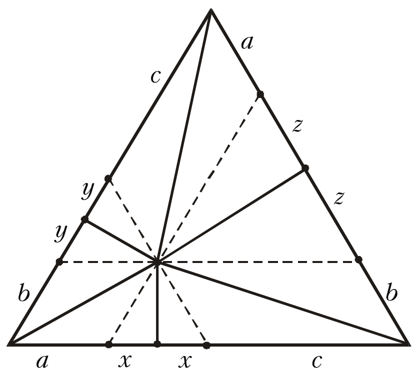

Рис.3

1. Диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме длин катетов минус длина гипотенузы.

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 2.

2. Сумма длин катетов красных треугольников, лежащих на сторонах равностороннего треугольника, равна сумме длин катетов синих треугольников, лежащих на тех же сторонах.

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 3.

Теперь, применив первое вспомогательное утверждение к синим и красным треугольникам с учетом второго вспомогательного утверждения, мы получаем требуемое.

В.Произволов

М1674. *Функция f(n) определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет условиям*

$$f(f(n)) + f(n) = \begin{cases} 2n-1, \text{если } n \text{ четное;} \\ 2n+1, \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Найдите значение f(1999).

Так как $f(n)$ определена на множестве натуральных чисел, а $f(f(n))$ тоже определена, то естественно заключить, что значения $f(n)$ принадлежат натуральному ряду чисел.

Вначале рассмотрим случаи n = 1, 2:

$$f(f(1)) + f(1) = 3,$$
$$f(f(2)) + f(2) = 3. \quad (1)$$

Отсюда видно, что значения $f(1)$, $f(2)$ должны принадлежать множеству {1, 2}. Если бы $f(1)$ = 1, то тогда из первого уравнения следовало бы, что $f(1)$ + 1 = 3, или $f(1)$ = 2 – противоречие.

Итак, $f(1)$ = 2, $f(2)$ = 1, что удовлетворяет обоим уравнениям (1).

Аналогичные рассмотрения при n = 3, 4 показывают, что $f(3)$ = 4; $f(4)$ = 3. Эти результаты позволяют выдвинуть предположение:

для любых $n \in \mathbf{N}$

$$f(2n-1) = 2n,$$
$$f(2n) = 2n-1. \quad (*)$$

Докажем эту гипотезу методом математической индукции. Зафиксируем некоторое число $k \geq 1$ и предположим, что свойство (*) выполняется для всех $n \leq k$. Выведем отсюда, что оно также будет справедливо при $n = k + 1$, т.е.

$$f(2k+1) = 2k+2,$$
$$f(2k+2) = 2k+1.$$

Воспользовавшись определением функции, запишем

$$f(f(2k+1)) + f(2k+1) = 4k+3,$$
$$f(f(2k+2)) + f(2k+2) = 4k+3. \quad (2)$$

Вообще говоря, значения $f(2k+1)$, $f(2k+2)$ могут принадлежать множеству {1, 2, ..., $2k$, $2k$ + 1, $2k$ + 2, ..., $4k$ + 3}, но «младшие» величины 1, 2, ..., $2k$ уже «заняты» значениями $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2k)$ и должны быть отброшены. Точно так же должны быть отброшены и «старшие» значения $2k$ + 3, $2k$ + 4, ..., $4k$ + 3, ибо в противном случае нельзя будет подобрать дополняющую до $4k$ + 3 пару для значения функции $f(f(2k+1))$ или $f(f(2k+2))$. Остается лишь одна-единственная возможность $f(2k+1)$ = $2k$ + 2; $f(2k+2)$ = $2k$ + 1, которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнениям (2).

Теперь можно дать ответ на вопрос задачи:

$$f(1999) = 2000.$$

В.Кириак

М1675*. *В тетраэдре ABCD: AB = CD = 2, AC = BC = = AD = BD = $\sqrt{3}$. Докажите, что его можно разрезать а) на 8; б) на 27 подобных ему и равных между собой тетраэдров.*

а) Пусть M – середина AB. Тогда CM и DM перпендикулярны AB, $CM = DM = \sqrt{2}$. Следовательно, двугранный угол при ребре AB прямой. Двугранный угол при ребре CD также прямой, а остальные двугранные углы равны $\pi/3$ (в равногранном тетраэдре сумма косинусов двугранных углов при любой грани равна единице). Поэтому четыре тетраэдра, равных данному, можно склеить вдоль ребра AB в тело $ACDC'D'B$, состоящее из двух одинаковых правильных четырехугольных пирамид $CDC'D'A$ и $CDC'D'B$, склеенных основаниями. Ребра CD, $C'D$, CD', $C'D'$ этого тела равны 2, и двугранные углы при этих ребрах прямые. Остальные 8 ребер равны $\sqrt{3}$, и двугранные углы при них равны $2\pi/3$. Поэтому, приклеив затем к граням ACD, $AC'D'$, BCD', $BC'D$ этого тела еще по одному тетраэдру, равному данному, получим тетраэдр вдвое большего объема (см. рисунок).