щих по 10 литров. Затем опустошим три из бочек, в которых по 4 литра, и уберем их. Получим набор (8, 8, 8, 8, 3, 20). Объединив воду бочек с 8 литрами, получим (32, 3, 20). После чего проводим переливания: (32, 3, 20) → (12, 3, 40) → (24, 3, 28) → (24, 6, 25) → → (24, 12, 19) → (24, 24, 7) → (48, 0, 7). Уберем пустую бочку и продолжим: (48, 7) → (41, 14) → → (27, 28) → (54, 1), что и требовалось получить.

б) Всего в бочках $k = n(n+1)/2$ литров воды. Если k нечетное, то, как и в пункте а), легко убедиться, что в одну бочку можно собрать не более $k-1$ литров воды. Пусть k – четное число, убедимся, что в одну бочку нельзя собрать всю воду. Для этого применим обратный ход и посмотрим, как выглядит операция обратная к доливанию. Она выглядит так: воду в какой-то бочке делят пополам, после чего две половинки или оказываются в отдельных бочках, или одну из них вливают в какую-то не пустую бочку (а другую половинку оставляют в отдельной бочке).

В результате таких операций из бочки с k литрами воды можно получить только бочки, в которых $mk/2^S$ литров воды при некоторых натуральных m и S (поскольку есть только деление на 2 и сложение). Значит, в таком виде, в частности, должно представляться и число 1, но число 1 не представляется в таком виде, так как k не является степенью двойки.

При четном k в одну бочку нельзя собрать не только k литров воды, но и $k-1$ литр воды, так как $k-1$ нечетное число, а последняя операция перелива могла быть только удвоением.

Таким образом, в случае четного k в одну бочку можно собрать не более $k-2$ литра воды, а в случае нечетного k – не более $k-1$ литра воды. Осталось убедиться, что эти оценки сверху достижимы. Схема алгоритма достижения такова. Имея две бочки с a и b литрами воды, где $a+b$ нечетно и $a \equiv 2^m \bmod (a+b)$ при некотором натуральном m, мы можем получить в этих бочках после переливаний 1 и $a+b-2$ литров воды, затем 2 и $a+b-2$. Далее, воспользовавшись бочкой с 2 литрами воды, «всосем» еще 2 литра из остальных бочек и получим в этих двух бочках 4 и $a+b-2$ литров воды и т.д.

Таким образом, начав с бочек, в которых 1 и 2 литра воды, будем «всасывать» из остальных по 2 литра, пока во всех остальных бочках в сумме останется 1 или 0 литров воды.

Р.Женодаров, Г.Челноков

М1669. *Натуральные числа a, b и c таковы, что ab + + bc = ca. Докажите равенства*

$$НОК(a,\ b) = НОК(b,\ c) = НОК(c,\ a)$$

(НОК – наименьшее общее кратное).

Докажем, что наименьшее общее кратное трех чисел a, b и c равно наименьшему общему кратному любых двух из них, например чисел a и b: $\text{НОК}(a, b, c) = \text{НОК}(a, b)$. Этого будет достаточно. Очевидно, что число c является делителем произведения ab. Для нашей цели достаточно доказать, что число c является делителем $\text{НОК}(a, b)$. Пусть p^m – сомножитель в разложении числа c на простые множители. При этом p^n – сомножитель в разложении числа a, а p^k – сомножитель в разложении числа b, и $n + k \ge m$. Предположим, что $\max(n, k) > m$. Так как $ab = c(a-b)$, то левая часть равенства делится на p^{n+k}, а правая – на $p^{m+\min(n,k)}$. Но $n + k < m + \min(n, k)$ – получили противоречие. Значит, $\max(n, k) \ge m$, и все доказано.

Дополнительно получим следствие из утверждения задачи. Сначала вспомним, что для любой пары натуральных чисел x и y справедливо равенство

$$\text{НОК}(x,\ y) \cdot \text{НОД}(x,\ y) = xy.$$

Тогда следствие выглядит так: если натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству $ab + bc = ca$, то имеет место равенство

$$\text{НОД}(a,\ b) + \text{НОД}(b,\ c) = \text{НОД}(c,\ a).$$

В.Произволов

М1670. *В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD перпендикулярны, а стороны AB и CD не параллельны. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей внутри ABCD. Докажите, что около четырехугольника ABCD можно описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников ABP и CDP равны.*

а) Докажем, что если около $ABCD$ можно описать окружность, то $S_{APB} = S_{CPD}$. Действительно, в этом случае серединные перпендикуляры к непараллельным сторонам AB и CD пересекаются в центре описанной окружности, т.е. $PA = PB = PC = PD$ (рис.1). Кроме того, $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$, так как $90^\circ = \angle AOB = = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$. Значит, $\sin\angle APB = \sin\angle CPD \Rightarrow S_{APB} = = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot \sin\angle APD = \frac{1}{2} PC \cdot PD \cdot \sin\angle CPD = S_{CPD}$.

б) Докажем, что если $S_{APB} = S_{CPD}$, то около $ABCD$ можно описать окружность.

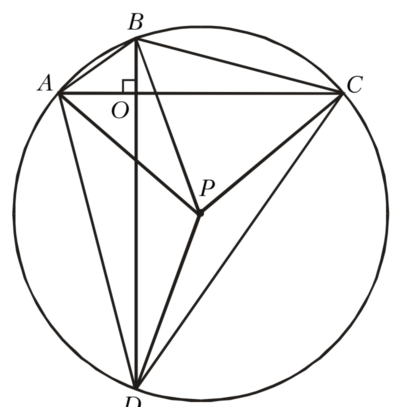

Рис.1

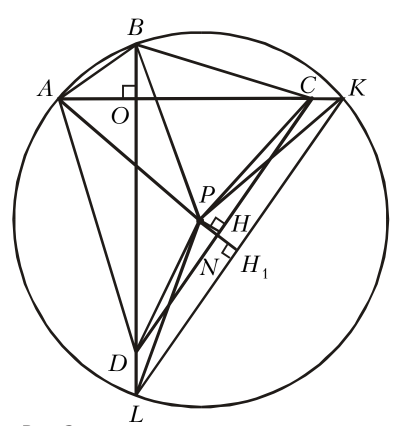

Рис.2

Пусть это не так, тогда, без ограничения общности, $PA = PB > > PC = PD$. Проведем окружность радиуса PA с центром в точке P. Пусть она пересечет второй раз прямую AC в точке K, BD – в точке L (рис.2). Тогда K и C лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из P на AC (так как A и C, а также A и K лежат по разные стороны от него), значит, C между A и K. Так же L и D лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из P на BD, и D лежит между B и L. Тогда точка P и отрезок KL лежат по разные стороны от прямой CD. Отсюда следует, что если PH и PH_1 – высоты треугольников CPD и KLP соответственно, то $PH_1 >$