Струна рояля и солнечный свет

А.СТАСЕНКО

Доколе свет с вами, веруйте в свет, да будете сынами света.
Евангелие от Иоанна 12:36

Почему музыкальные инструменты издают так называемые *музыкальные* звуки, а не беспорядочный шум, как, например, кастрюля, по которой колотят ложкой? Это связано с тем, что инструмент порождает (генерирует) звуки не любых, а определенных частот – так называемые *монохроматические* («одноцветные») тоны.

Если частота звука ν, то его длина волны в воздухе будет $\lambda = v/\nu$, где v – скорость звука в воздухе. Длина струны рояля или гитары, так же, как и длина трубки орга́на, определенно связаны с длиной волны звука λ, который они предназначены издавать. Например, для струны эту мысль поясняет рисунок 1. На нем изображены три случая изгиба струны (три *моды*), но в любом из них на длине струны l укладывается целое число полуволн:

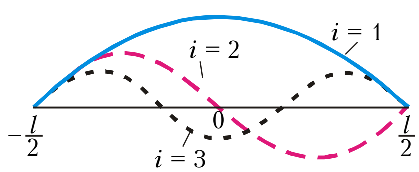

Рис.1

$$l = i\frac{\lambda_i}{2},\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (1)$$

Видно, что самая большая длина волны с номером $i = 1$ равна $2l$, а все остальные (соответствующие бо́льшим значениям i) будут меньше. Сам же номер i показывает, сколько полуволн $\lambda_i/2$ умещается на длине струны.

А если это не струна, а квадратная пластинка площадью $l \times l$ (рис.2)? Тогда вдоль каждой из осей X и Y может уместиться следующее количество полуволн:

$$i = 2\frac{l}{\lambda_i} \text{ вдоль оси } X\ (i = 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$j = 2\frac{l}{\lambda_j} \text{ вдоль оси } Y\ (j = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2)$$

Причем речь тут идет не обязательно о независимых волнах, распространяющихся каждая вдоль своей оси.

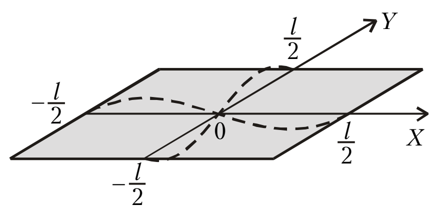

Рис.2

Ведь отрезки λ_i и λ_j могут принадлежать и одной и той же волне λ, бегущей, например, под углом α к оси X (рис.3; сплошные наклонные линии). Тогда

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{\cos\alpha} = \frac{2l}{i},\quad \lambda_j = \frac{\lambda}{\sin\alpha} = \frac{2l}{j}.$$

А как только появляются синус и косинус, возникает непреодолимое желание возвести их в квадрат и

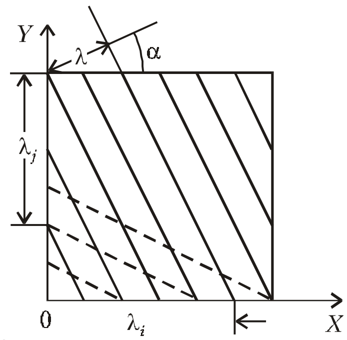

Рис.3

сложить:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \frac{\lambda^2}{4l^2}\left(i^2 + j^2\right).$$

Сразу видно, что этому соотношению удовлетворяет не единственный набор чисел i и j. Например, на рисунке 3 штриховыми линиями показана еще одна волна, для которой имеет место то же самое равенство

$$i^2 + j^2 = 4\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = R^2. \qquad (3)$$

Но ведь это – уравнение окружности радиусом R в плоскости i, j (рис.4). Правда, абсцисса и ордината здесь

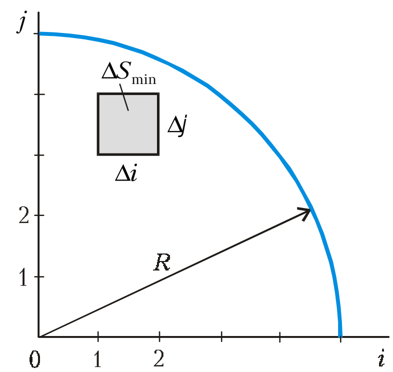

Рис.4

принимают только целочисленные значения, а площадь – «зерниста»: существует наименьшее значение $\Delta S_{\min} = \Delta i \cdot \Delta j = 1$ (закрашенный квадратик). И радиус окружности измеряется не в метрах – он принадлежит пространству безразмерных чисел. Сколько же таких квадратиков, или пар чисел i, j, помещается внутри четверти этой окружности? (Почему четверти? Потому что числа i и j положительны.) Эта четверть круга называется по-научному первым квадрантом. Ясно, что нужно эту