О волнах, поплавках, шторме и прочем

Е. СОКОЛОВ

О ВОЛНАХ НА ВОДЕ НА СТРАницах журнала «Квант» рассказывалось уже не раз. Но тема эта неисчерпаема. Вглядываясь в ряды волн, бегущих по бушующему морю, или в рябь на поверхности тихой речушки, невольно поражаешься изменчивости и многообразию возникающих картин. И тем заманчивее становится желание найти скрытые закономерности, управляющие таким движением.

В этой статье мы обсудим три явления, связанные с кинематикой распространения гравитационных волн по поверхности воды. В дни летнего досуга вы можете исследовать их экспериментально. Инвентарь для этого вам понадобится нехитрый: поплавок, часы да пригоршня камней.

Цуг волн

Эта история произошла на рыбалке. Клева не было, и, дожидаясь лучших времен, я принялся подсчитывать число волн, время от времени поднимающих поплавок. Однако через некоторое время мое душевное равновесие было нарушено. Подсчет не сходился. Волны упорно отказывались подчиняться обычной арифметике. В чем дело? Что произошло? Попробуем разобраться.

Для начала обсудим такой простой вопрос:

По спокойной поверхности водоема бежит группа волн, состоящая из 20 горбиков (рис.1). (Другие научные названия такого образования: *цуг волн*, *волновой пакет*.) Сколько раз поплавок поднимется вверх?

Обычно здесь все солидарны – 20 раз. Правда, иногда осторожные люди дают более уклончивый ответ: ну, может быть, 19 или 21. Но при этом все мы ошибаемся и ошибаемся существенно. На самом деле двадцать горбиков поднимают поплавок сорок раз, пятьдесят горбиков – сто раз, сто – двести раз!

Это настолько непривычно, что однажды один из слушателей, для того чтобы доказать нелепость такого ответа, специально изготовил из бумаги модель цуга (рис.2,*а*) и предложил всем желающим непосредственно «руками» проверить, сколько раз поднимется поплавок за время прохождения цуга мимо неподвижного наблюдателя. На бумаге получилось 20, но на воде всегда получается ровно в два раза больше. В чем же ошибка?

Иллюстрация П.Чернуского

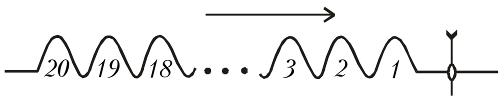

Рис. 1

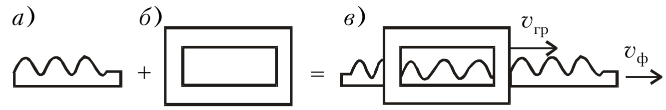

Рис. 2

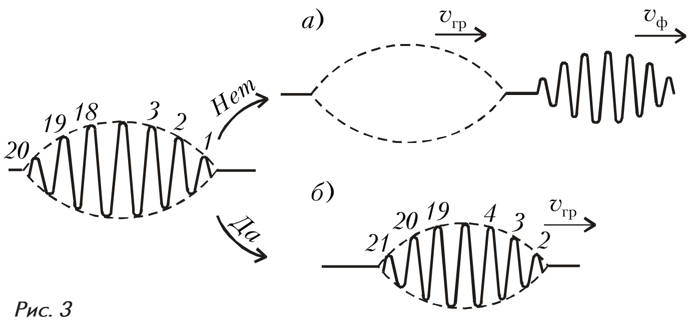

Рис. 3

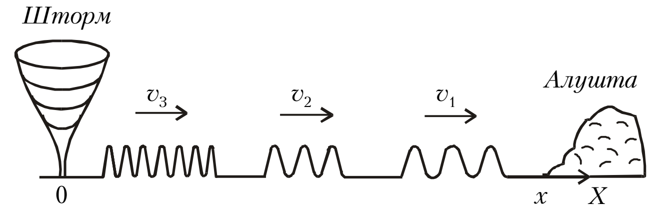

Рис. 4

Оказывается, чтобы правильно произвести подсчет в модельном эксперименте, его следовало бы проводить несколько иначе. Вместе с моделью волны надо еще изготовить экран с прорезью (рис.2,*б*), в которую вмещается ровно 20 горбиков. И показывать их надо вместе, только двигать с разными скоростями (рис.2,*в*). Дело в том, что при анализе движения волновых пакетов следует пользоваться двумя правилами.

Во-первых, волновой пакет – это симбиоз двух объектов: плавной *огибающей* и быстроменяющейся *наполняющей*. Во-вторых, у каждого типа волн не одна, а две скорости. Первая (именно о ней мы обычно говорим как о скорости движения волны) – это фазовая скорость волны $v_ф$, т.е. скорость, с которой движется наполняющая, в нашем случае – горбики. Вторая – это групповая скорость волны $v_{гр}$, с которой движется огибающая, в нашем примере – экран. Фазовая и групповая скорости связаны между собой соотношением

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}\left(kv_ф\right),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число волны. Мы будем пользоваться именно этим числом, а не длиной волны λ, так как это существенно упрощает математические записи. Отметим важную особенность приведенного соотношения. Если $v_ф$ не зависит от k, то $v_{гр} = v_ф$. Эти скорости различны только в том случае, если $v_ф$ зависит от длины волны, т.е. если волны обладают *дисперсией.*

Предвидя возможные возражения, давайте сразу же обсудим эти правила. Первое вряд ли вызовет сомнения. С точки зрения математики, профиль волнового пакета $h(x)$ представляет собой произведение двух функций: гладкой функции $F(x)$ – огибающей и бесконечной гармонической волны – наполняющей:

$$h(x) = F(x)\cos(kx).$$

Что касается второго правила, то здесь могут возникнуть вопросы. Например, такие. Разве могут оболочка и содержимое двигаться с разными скоростями, и как же тогда назвать то, что получится спустя некоторое время? Оказывается, могут. Только происходит это движение не так, как показано на рисунке 3,*а*, а иначе. Горбик не обгоняет огибающую. Просто доходя до переднего фронта, он исчезает, а ему на смену на заднем фронте рождается новый (рис.3, *б*). Стать первым, чтобы исчезнуть, – вот кредо каждого горбика.

А как получить формулу, связывающую групповую и фазовую скорости? Здесь достаточно ограничиться лишь пояснением. Рассмотрим простой «суррогат» волнового пакета – две волны, имеющие частоты $\omega + \Delta\omega/2$ и $\omega - \Delta\omega/2$ и волновые числа $k + \Delta k/2$ и $k - \Delta k/2$ соответственно. Их сумма равна

$$A\cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) +$$

$$+ A\cos\left(\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k - \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega t - kx).$$

Видно, что основная волна – с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ и скоростью $v_ф = \omega/k$ – модулируется огибающей в виде волны с длиной волны $\lambda = 2\pi/\Delta k$ и скоростью $v_{гр} = \Delta\omega/\Delta k = \Delta\left(v_ф k\right)/\Delta k$.

Теперь нам по силам объяснить, почему число подъемов поплавка ровно в два раза больше числа горбиков. Причина – в особом законе дисперсии для гравитационных волн, который мы примем без доказательства[1]:

$$v_ф = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Вычислим групповую скорость:

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}\sqrt{gk} = \frac{1}{2}v_ф.$$

Это и есть ключ к отгадке! Групповая скорость для гравитационных волн ровно в два раза меньше, чем фазовая. За время, пока волновой пакет пройдет мимо точки наблюдения (поплавка), успеет родиться еще ровно столько же гребней, сколько содержится в волновом пакете. И на каждом из этих гребней поднимется поплавок.

Вернемся к модельному эксперименту. Будем двигать и огибающую и наполняющую, только скорость наполняющей установим в два раза большей скорости огибающей. Проверим, сколько раз поднимется поплавок. Все правильно – ровно 40 раз!

Шторм

Попробуем свои силы на более масштабной задаче:

---

[1] *Можно получить этот закон с помощью метода размерностей. Действительно, скорость гравитационных волн v (размерность м/с) может зависеть только от плотности ρ (кг/м^3), ускорения свободного падения g (м/с^2) и длины волны λ (м). Единственно возможный вариант: $v \sim \sqrt{g\lambda}$. (Прим. ред.)*

20 июля 1996 года в 9 часов утра на южном побережье Крыма в районе Алушты было спокойно – полный штиль. Но о берег с завидной регулярностью бились волны. Период ударов не составляло труда измерить – он оказался равным 5,0 с. 21 июля в тот же час и в том же месте по-прежнему был штиль, но по-прежнему на море было волнение. Однако период ударов волн был уже другой – 3,3 с. Надо определить, когда и на каком расстоянии от берега разыгрался шторм.

Выберем в качестве рабочей модели следующую. В некоторой области Черного моря в некоторый неизвестный пока момент времени разразился шторм. Шторм – это ветер, шум, брызги и, конечно, рождение волн. Волны разбегаются в разные стороны и через некоторое время достигают берега. Вот почему даже в штиль море может быть неспокойным.

Теперь проведем расчет. Поместим начало координат в эпицентр шторма (рис.4). Тогда в точку с координатой x к моменту времени t придет группа волн, у которых групповая скорость равна x/t:

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{2}v_{\text{ф}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{x}{t}.$$

Отсюда легко определить волновой вектор и период пришедших волн:

$$k = \frac{gt^2}{4x^2},$$

$$T = \frac{\lambda}{v_{\text{ф}}} = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{k}{g}} = \frac{4\pi x}{gt}.$$

Видно, что период пришедших волн уменьшается с течением времени (рис.5,*а*). Это легко объяснить. Длинные волны имеют большую скорость, поэтому приходят раньше. Но у них и период больший:

$$T = \frac{\lambda}{v_{\text{ф}}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}.$$

Для вычисления расстояния до эпицентра и времени начала шторма удобно построить график зависимости частоты $\nu = 1/T$ приходящих волн от времени (рис.5,*б*). С его помощью, используя данные нашей задачи, легко получить

$$t = \Delta t\frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} = \Delta t\frac{T_2}{T_1 - T_2} = \\ = 24\text{ ч}\ \frac{3{,}3\text{ с}}{5\text{ с} - 3{,}3\text{ с}} \approx 47\text{ ч},$$

$$x = \frac{g}{4\pi}\frac{\Delta t}{\nu_2 - \nu_1} = \\ = \frac{g}{4\pi}\frac{T_1T_2}{T_1 - T_2}\Delta t \approx 650\text{ км}.$$

Итак, шторм разразился в 650 км от берега утром 18 июля 1996 года.

Глядя на эти цифры, невольно задумываешься: а реально ли, что волны проходят по морю такой громадный путь и не затухают за счет вязкого трения? Оказывается, вполне реально. Убедиться в этом можно, оценив по размерности время затухания волн за счет вязкости. Попробуйте сделать это самостоятельно, а мы возьмем из справочника готовую формулу, которая отличается от полученной по размерности лишь постоянным множителем:

$$t = \frac{\lambda^2\rho}{8\pi^2\eta}$$

(здесь $\eta = 10^{-3}$ кг/(м · с) – коэффициент вязкости воды), и сделаем вычисления. Подсчет показывает, что уже для обычных волн, бороздящих наши пруды и реки ($\lambda \sim 1$ м), время затухания достаточно велико – порядка 3 часов, а для морских волн ($\lambda \sim 10 - 100$ м) оно в сотни и тысячи раз больше. Поэтому для длинных волн затухание за счет вязкости совершенно несущественно. Оно определяет лишь эволюцию коротких капиллярных волн ($\lambda \sim 1$ см).

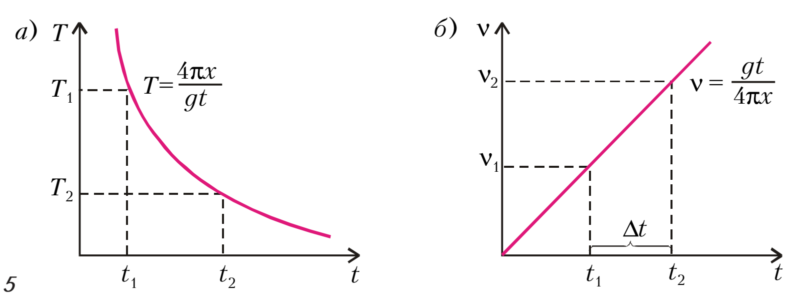

Рис. 5

Резонанс

«Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою». Воспользуемся и мы советом Козьмы Пруткова и кинем в воду, через равные промежутки времени, сорок камней. Сколько волн побежит при этом?

Математик скажет – задача некорректна. И будет прав. Но давайте подойдем к этому вопросу без излишней математической строгости и попробуем сначала получить ответ экспериментально. Правда, опыт лучше провести не на пруду, а в длинном, узком и прямом канале – в этом случае движение волн одномерное, и наблюдать их можно гораздо дольше. Результат эксперимента таков: через некоторое время из образовавшегося на поверхности воды хаоса выделится движущийся волновой пакет, состоящий из двадцати волн.

Итак, ответ у поставленного вопроса есть. Теперь попытаемся получить его теоретически.

Для этого надо знать один простой секрет – когда камень падает в воду, он порождает бесконечное количество гармонических волн. «Как же так, – скажете вы, – он просто изменяет профиль поверхности $h(x)$, делая его похожим на параболу». Оказывается, это одно и то же.

Основой такого утверждения является знаменитая *теорема Фурье*, согласно которой любая четная функция $h(x)$ (для наших целей достаточно рассматривать лишь четные функции) может быть представлена как сумма бесконечного количества косинусов (разложена в ряд Фурье):

$$h(x) = \int_0^\infty a(k)\cos(kx)\,dk.$$

Человеку, который первый раз знакомится с теоремой Фурье, она кажется неправдоподобной – косинус совершенно непохож на всем привычную параболу. Но все же она справедлива. Попробуйте построить на экране компьютера функцию, заданную рядом

$$h(x) = -\cos\pi x + \frac{1}{2^2}\cos 2\pi x - \\ - \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \ldots$$

на интервале $-1 < x < 1$. Складываем косинусы, а получаем… параболу!

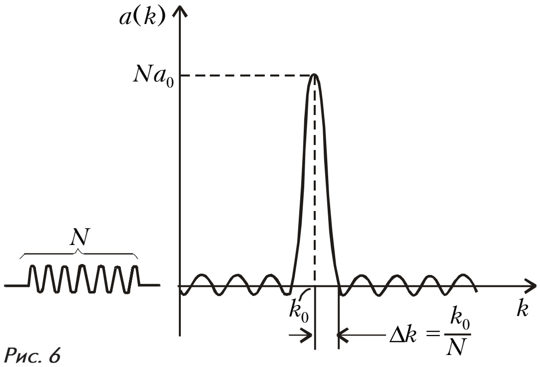

Рис. 6

Коэффициенты $a(k)$ определяют «вес» каждой гармоники в разложении. Для каждого профиля поверхности $h(x)$ их можно определить с помощью интегрирования:

$$a(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cos(kx)\,dx.$$

Если вы умете интегрировать, можете проверить сами, если нет – поверьте на слово.

Отметим необычные свойства спектра, которым обладает волновой пакет. Если на поверхности волновой пакет и может затеряться, то в спектре его присутствие видно сразу (рис.6). Волновому пакету с наполняющей, имеющей волновое число k_0, и состоящему из N элементарных волн, соответствует пик при $k = k_0$. Высота пика прямо пропорциональна N, а его полуширина, что особенно важно для нас, равна $\Delta k = k_0/N$. (Проверьте это сами, выбрав любую простую огибающую.)

Теорема Фурье дает нам в руки мощное оружие. Теперь решение любой задачи, в которой речь идет об искажении поверхности воды, мы можем начинать стандартными словами: в результате удара произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Именно так мы и поступим.

Итак, в результате удара камня о воду произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Каждая волна начинает свою собственную жизнь. А жизнь гармонической волны проста – она равномерно движется со своей фазовой скоростью. Поэтому спустя время t гармоника, дававшая в начальное разложение вклад $a(k)\cos(kx)$, будет давать вклад

$$\frac{1}{2}a(k)\cos\big(k(x+vt)\big) + \frac{1}{2}a(k)\cos\big(k(x-vt)\big)$$

– для простоты мы будем говорить лишь об одномерной волне, которая бежит вправо и влево. Для нахождения результирующего профиля следует сложить вклады всех гармоник:

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} a(k)\cos\big(k(x+vt)\big)dk + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} a(k)\cos\big(k(x-vt)\big)dk.$$

Теперь вернемся к нашей задаче о камнях. Будем считать, что мы кинули $n = 40$ камней, бросая их через одинаковые промежутки времени τ. Начало решения нам известно. Первый камень упал, создал бесконечно много волн, волны стали двигаться. Второй камень упал... и т.д. Осталось сложить все гармоники от каждого удара с учетом их сдвигов.

Вместо того чтобы приступать к лобовому штурму, посмотрим на суммарный вклад одинаковых гармоник от разных ударов. Для определенности будем считать, что наблюдение мы проводим слева от места падения камней (рядом с ним), поэтому рассмотрим гармоники, бегущие влево. Их общий вклад сразу после последнего удара равен

$$\frac{1}{2}a(k)\cos kx + \frac{1}{2}a(k)\cos k\big(x+v_ф\tau\big) + \ldots + \frac{1}{2}a(k)\cos k\big(x+(n-1)v_ф\tau\big),$$

или

$$\frac{1}{2}a(k)\big(\cos(kx) + \cos(kx+\varphi) + \ldots + \cos\big(kx+(n-1)\varphi\big)\big),$$

где $\varphi(k) = kv_ф(k)\tau = \sqrt{kg}\,\tau$. Сумма косинусов, стоящая в скобках, хорошо известна – она связана и с дифракционными решетками, и с правильными n-угольниками, и с функцией-«гребенкой», изображенной на рисунке 7,*а*. Но давайте обо всем по порядку.

Как подойти к вычислению такой суммы? Очень просто. Надо от сложения косинусов перейти к более сложной задаче – сложению векторов. Посмотрите на n единичных векторов, изображенных на рисунке 8,*а*. Если мы построим их сумму, то найдем и интересующую нас сумму косинусов – она будет равна проекции суммарного вектора на ось X. Искомая сумма будет снова косинусом, умноженным на длину суммарного вектора $A(\varphi)$:

$$A(\varphi)\cos\left(kx + \frac{n-1}{2}\varphi\right).$$

Амплитуду $A(\varphi)$ можно определить из рисунка 8,*б*, на котором мы изобразили эти же векторы приложенными друг к другу. Вычисление оставляем вам в качестве упражнения, а здесь дадим лишь ответ:

$$A(\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Функция-«гребенка» и есть график

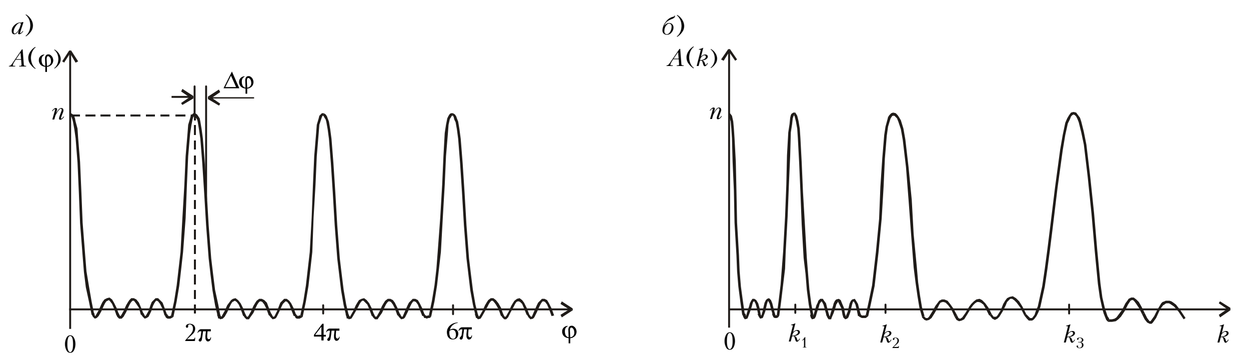

Рис. 7

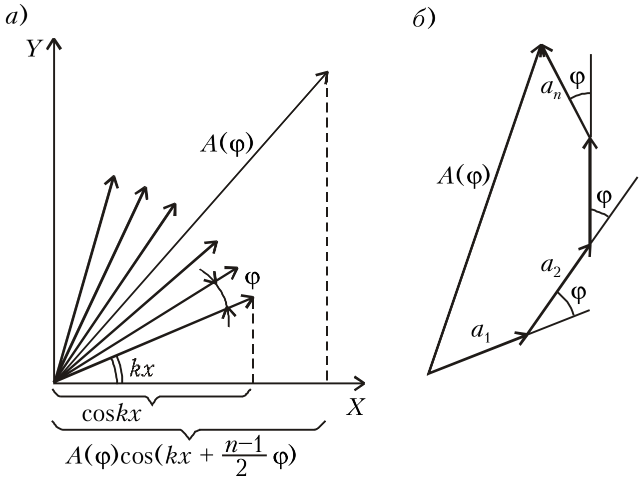

Рис. 8

этой функции. Особенности ее строения легко понять, если обратиться к векторной диаграмме (рис.9). При $\varphi(k) = 2\pi m$ все векторы вытянуты в линию, и их суммарная длина $A(\varphi) = n$. При небольшом изменении на $\Delta\varphi = 2\pi/n$ они складываются в правильный n-угольник, а $A(\varphi) = 0$. Затем происходит долгое движение вблизи нуля, пока при возрастании $\Delta\varphi$ на 2π векторы снова не вытягиваются в ряд.

Скомпоновав таким образом вклад одинаковых гармоник от всех ударов, для получения ответа нам осталось только проинтегрировать:

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty a(k)A(k)\cos\left(kx + vt + \frac{n-1}{2}\varphi\right)dk.$$

А обязательно ли это делать? Нет, ответ можно предсказать и без интегрирования!

Произведение $a(k)A(k)$ можно рассматривать как спектр суммарного возмущения, а его легко узнать. Амплитуда A, построенная как функция волнового числа $k = \dfrac{\varphi^2}{g\tau^2}$, по-прежнему имеет вид «гребенки» с пиками высотой n (см. рис.7,*б*). Единственное, теперь пики расположены не равномерно, а соответственно значениям

$$k_m = \frac{4\pi^2 m^2}{g\tau^2}$$

и полуширины у них различны:

$$\Delta k_m = \frac{dk}{d\varphi}\Delta\varphi = 2k_m\frac{\Delta\varphi}{\varphi_m} = \frac{2k_m}{nm}.$$

При перемножении гладкой функции $a(k)$ с «гребенкой» $A(k)$ получится снова «гребенка». Ну, а в таком случае мы, пожалуй, обойдемся без интегрирования. Ведь каждый пик – это волновой пакет (как на рисунке 6)!

Бросив много камней, мы создали бесконечный ряд волновых пакетов. Почему так происходит? Почему возбуждаются не все волны, а лишь избранные и близкие к ним? Причина простая – резонанс. Перепишем условие максимума амплитуды $\sqrt{kg}\,\tau = 2\pi m$, используя период $T = \lambda/v_ф = 2\pi/(kv_ф)$. Оно примет вид

$$\tau = mT$$

– а это и есть условие резонанса. Раскачиваются те волны, для которых удары приходятся ровно через период или целое число периодов. Совсем как для обычных качелей.

Рассказывая в начале о результатах наших наблюдений, мы немного слукавили. На самом деле, на воде возникает не один волновой пакет, а несколько (рис.10). Нам удавалось наблюдать пакеты до четвертого порядка включительно. Самое заметное и четкое образование, которое к тому же и появляется первым, – это пакет первого порядка. В нем $n/2$ горбиков, и он достаточно быстро движется. Если немного подождать на месте, а не идти за первым пакетом, то можно увидеть возникновение более слабого пакета второго порядка, в котором уже n горбиков, а затем – и возникновение пакетов следующих порядков.

Это все можно объяснить теоретически. Длина волны, наполняющей пакет m-порядка, равна

$$\lambda_m = \frac{g\tau^2}{2\pi m^2},$$

поэтому первый волновой пакет состоит из наполняющей с самой большой длиной волны. У него самая большая групповая скорость, он быстрее всех удаляется от начальной точки. А сколько в нем горбиков? На этот вопрос очень просто ответить. Полуширина пика первого порядка составляет $\Delta k = 2k_m/n$, а полуширина волнового пакета, состоящего из N волн, равна k_0/N; следовательно, в нем $n/2$ горбиков. Волновые пакеты более высоких порядков имеют наполняющую с меньшей длиной волны $\lambda_m = \lambda_1/m^2$. Поэтому групповые скорости у них меньше, и расходятся они через большее время. Кроме того, полуширина соответствующих им пиков меньше: $\Delta k = 2k_m/(nm)$, поэтому пакет m-го порядка состоит из

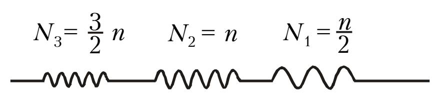

Рис.10

$nm/2$ горбиков. Что касается амплитуды, то она в m раз меньше, чем у первого. При увеличении числа волн в пакете он не только должен сужаться, но и вытягиваться. Однако высота пиков «гребенки» $A(k)$ одна и та же.

Итак, бросив в воду сорок камушков, вы увидите двадцать горбиков.

Сознаюсь, этот ответ мне по душе. Он подтверждает присущее всем нам чувство веры в общность и незыблемость законов сохранения. Все сходится: сорок камушков – двадцать горбиков – сорок раз поднимается поплавок. Правда, есть и другие пакеты, и поплавок еще не раз поднимется... Но согласитесь, что это нисколько не портит картину, а лишь обогащает ее.

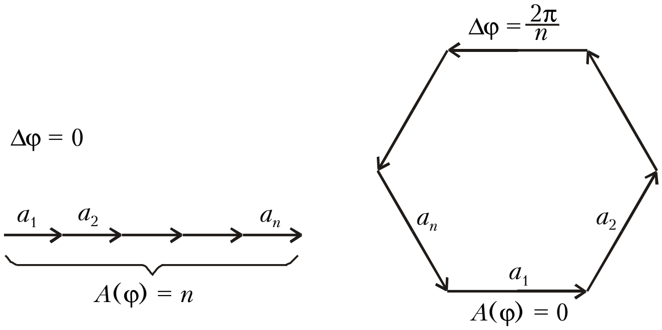

Рис. 9