Суммы квадратов и целые гауссовы числа

1. а) $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2$;
б) $50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$.
4. *Указание*. $21 = 3 \cdot 7$.
5. а) 0, 1, 3, 4, 5 или 9.
6. Рассмотрим числа $1^2, 2^2, \ldots, (p-2)^2, (p-1)^2$. При любом p строка остатков этих чисел симметрична, т. е. читается слева направо так же, как справа налево. Это легко объяснить: остатки от деления на p чисел x^2 и $(p-x)^2 = p(p-2x) + x^2$ совпадают. Поэтому достаточно рассмотреть числа $1^2, 2^2, \ldots$ $\ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Все они при делении на p дают разные остатки. Действительно, если бы какие-то два из этих чисел, скажем r^2 и s^2, где $r \neq s$, давали одинаковые остатки, то разность $r^2 - s^2 = (r-s)(r+s)$ делилась бы на p. Но ни $(r-s)$, ни $(r+s)$ не делятся на p (объясните, почему!).
7. а) *Первый способ*. Нечетное число при делении на 8 может дать один из остатков 1, 3, 5 и 7. Квадраты этих чисел (1, 9, 25 и 49) при делении на 8 дают остаток 1.
Второй способ. $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$, где n или $n+1$ четно.
Третий способ. $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$, где при нечетном x один множитель четен, а другой кратен 4.
в) Если все три числа x, y, z четны, то разделим обе части уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 4^m(8n+7)$ на 4. Так будем делать до тех пор, пока хотя бы одно из чисел x, y, z не станет нечетным. Поскольку квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1, а квадрат любого целого числа – остаток 0, 1 или 4, и поскольку ни одна из сумм $1+0+0$, $1+0+1$, $1+0+4$, …, $1+4+4$ не дает при делении на 8 ни остатка 7, ни остатка 4, ни остатка 0, получаем желанное противоречие.
Замечание. Гаусс доказал, что в виде суммы квадратов трех целых чисел представимы все натуральные числа, кроме чисел вида $4^m(8n+7)$, где m, n – целые неотрицательные числа. (В современном изложении этот факт доказан в «Курсе арифметики» Ж.Серра. Там использованы p-адические числа, символ Гильберта и теорема Минковского—Хассе.)

8. а) Если $n = x^2 + y^2$, где x, y – целые числа, то $\frac{n}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. Если бы одно из чисел x, y было четным, а другое нечетным, то сумма квадратов $x^2 + y^2$ была бы нечетной. Значит, числа x, y оба четны или оба нечетны. Следовательно, числа $(x+y)/2$ и $(x-y)/2$ – целые.
б) *Указание*. Если $x^2 + y^2$ кратно 5, то $(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2 = x^2 + y^2 - 5y^2$ кратно 5. Если, например, $x - 2y$ кратно 5, то $2x + y = 2(x-2y) + 5y$ тоже кратно 5.
в) Если $x^2 + y^2$ кратно 13, то $(2x-3y)(2x+3y) = 4x^2 - 9y^2 = 4(x^2+y^2) - 13y^2$ кратно 13. Если, например, $2x - 3y$ кратно 13, то $3x + 2y = 8(2x-3y) - 13x + 26y$ тоже кратно 13.
То же самое можно изложить на языке сравнений. Поскольку $x^2 \equiv -y^2$ и $3^2 \equiv -2^2 \pmod{13}$, имеем $3^2x^2 \equiv 2^2y^2$, т. е. $(3x+2y)(3x-2y) \equiv 0 \pmod{13}$, откуда следует, что хотя бы одно из чисел $3x+2y$ и $3x-2y$ кратно 13. Дальнейшее очевидно.
12. Рассмотрите числа вида $21 \cdot 5^n$ (или $3^{2n-1} \cdot 7$).
13. а) Если $n^2 + 1$ кратно d, то кратно d и каждое из чисел вида $(n+dk)^2 + 1$, где $k \in \mathbf{Z}$.
б) Число $n^2 + 1$ кратно 65 тогда и только тогда, когда оно кратно 5 и 13. Поскольку $n^2 + 1 = n^2 - 4 + 5 = (n-2)(n+2) + 5$ и $n^2 + 1 = n^2 - 25 + 26 = (n-5)(n+5) + 26$, число n при делении на 5 должно давать остаток 2 или 3, а при делении на 13 – остаток 5 или 8. Таких чисел среди первых 65 натуральных чисел всего четыре: 8, 18, 47 и 57. *Ответ*: 62.
15. Умножив обе части уравнения на 4 и прибавив затем к обеим частям 1, получим: $(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$. Поскольку правая часть не может иметь натуральных делителей вида $4x-1$, имеем: $x \le 0$. По той же самой причине $y \le 0$. *Замечание*. Рассматриваемое уравнение имеет бесконечно много решений в целых числах. Например, $x = 0$, $y = -z^2$ или $x = -1$, $y = -5n^2 - 2n$, $z = -5n - 1$.
16. а) Если n нечетно, то $n^2 - 1$ кратно 4, а число $m^2 + 1$ не кратно 4 ни при каком целом m. Если же $n = 2k$, то $n^2 - 1 = 4k^2 - 1$ дает остаток 3 при делении на 4.
б) Перенесем x^2 и y^2 в левую часть и прибавим 1 к обеим частям. Получим: $(x^2-1)(y^2-1) = z^2 + 1$. В силу пункта а), $x = y = 0$, откуда $z = 0$.
17. Вообще, при простом $p > 2$ числа вида $(p-k-1)! \cdot k! + (-1)^k$ кратны p.
22. а) $-i$; б) 1; в) $-i$; г) 0; д) -64; е) -1.
23. Равенство комплексных чисел $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Любитель тождеств заметит, что $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2$. (Впрочем, теорема 5 позволяет написать это равенство сразу, без тождеств.) Зная величины $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ и $x^2 - y^2 = a$, находим $x^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2} + a\right)/2$ и $y^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)/2$.
Ответ: если $b \ge 0$, то $x = \pm\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)/2}$ и $y = \pm\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)/2}$; если $b < 0$, то $x = \pm\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)/2}$ и $y = \mp\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)/2}$.

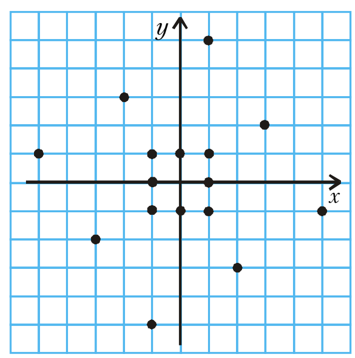

Рис. 1

25. Когда a и b одной четности, т. е. когда сумма $a + b$ четна.
26. в) Кратные числа $5 + 5i$.
28. Точки z, iz, $-z$, $-iz$ – вершины квадрата с центром в нуле.
31. *Указание*. $5 - i = (1+i)(2-3i)$. Ответ изображен на рисунке 1.
32. а) $3 - 11i - (1+i)(4+7i)$. Делители числа $4 + 7i$ содержатся среди делителей числа $(4+7i)(4-7i) = 4^2 + 7^2 = 65 = 5 \cdot 13 = (1+2i)(1-2i)(2+3i)(2-3i)$. Значит, число $4 + 7i$ есть произведение простого гауссова делителя числа 5 на простой гауссов делитель числа 13 (объясните, почему!). *Ответ*: 7. (Легко вычислить, что $3 - 11i = (1+i)(1-2i)(2-3i)$.) б) $6 + 12i = 3(1+i)(1-i)(1+2i)$. *Ответ*: 8.
33. а) $16 = (1+i)^8$. б) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot (3+2i) \cdot (3-2i)$.
в) Благодаря результату упражнения 29, $47 + i$ кратно числу $1 + i$. Разделив $47 + i$ на $1 + i$, получаем равенство $47 + i = (1+i)(24-23i)$. Поскольку $(24-23i)(24+23i) = 24^2 + 23^2 = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, в разложение числа $24 - 23i$ на простые гауссовы множители входят по одному простому делителю каждого из чисел 5, 13, 17.
Ответ: $47 + i = (1+i)(2+i)(3+2i)(-1-4i)$.
35. $1000009 = 293 \cdot 3413$. Пусть $a = 1000$, $b = 3$, $c = 235$, $d =$