Ловушка для треугольника

В.ДУБРОВСКИЙ, В.СЕНДЕРОВ

Много лет назад на приемном экзамене на физфак МГУ предлагалась следующая задача:

Упражнение 1. Медианы прямоугольного треугольника пересекаются на его вписанной окружности. Найдите углы этого треугольника.

Есть и другие задачи о треугольниках, в которых центроид (точка пересечения медиан) лежит на вписанной окружности. Например, треугольник, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части, фигурировал в задаче М1224 «Задачника «Кванта».

А как расположен относительно вписанной окружности ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника? Если треугольник правильный, то его ортоцентр находится в центре вписанной окружности. Ортоцентр неостроугольного треугольника, очевидно, лежит вне ее. Отсюда понятно, что, деформируя любой такой треугольник в правильный, мы обязательно пройдем через положение, в котором ортоцентр лежит точно на вписанной окружности.

А можно ли «посадить» на вписанную окружность сразу обе эти замечательные точки? Этот вопрос оказывается довольно сложным. Мы покажем, что ответ на него утвердительный:

треугольник, у которого и центроид, и ортоцентр лежат на вписанной окружности, существует.

Доказательство этого факта требует привлечения богатого арсенала методов и фактов геометрии треугольника, которые пригодятся читателям и при решении других задач.

Нам придется иметь дело с многочисленными соотношениями в треугольнике. Напомним стандартные обозначения его элементов (рис.1): стороны треугольника ABC обозначаются a ($= BC$), b, c; центры вписанной и описанной окружностей – I и O, а их радиусы, соответственно, – r и R; ортоцентр (точка пересечения высот) – H, центроид (точка пересечения медиан) – G.

В искомом треугольнике должно выполняться равенство $IG = IH = r$. Прежде чем заняться анализом этих

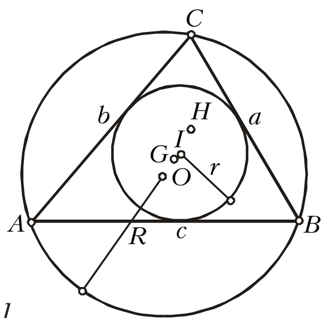

Рис. 1

уравнений, сделаем несколько полезных для дальнейшего «заготовок».

Замечательная формула для «замечательных расстояний»

Начнем с формулы, которая позволит нам выражать расстояния между различными «замечательными точками» треугольника ABC через другие его элементы.

Упражнение 2. Докажите, что для любой точки P и произвольных чисел x, y, z

$$\left|x\,\vec{PA}+y\,\vec{PB}+z\,\vec{PC}\right|^2 = s\cdot\left(xPA^2+yPB^2+zPC^2\right)-\left(xyc^2+yza^2+zxb^2\right),\quad(1)$$

где $s = x + y + z$ (рис.2).

Как известно из физики, при $s = x + y + z = 1$ точка D, определяемая равенством $\vec{PD} = x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC}$, есть центр масс системы трех масс x, y, z, помещенных в точки A, B, C, и формула (1) дает квадрат расстояния от точки P до D. В частности, при $x = y = z = 1/3$ точка D есть центроид G треугольника:

$$\vec{PG}=\frac{1}{3}\left(\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}\right),\qquad(2)$$

а само равенство (1) принимает вид *формулы Лейбница*

$$PG^2=\left(PA^2+PB^2+PC^2\right)\big/3-\left(a^2+b^2+c^2\right)\big/9$$

для квадрата расстояния от произвольной точки P до G.

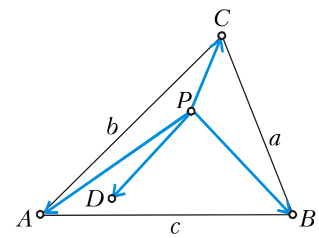

Рис. 2

Если $P = O$ – центр описанной окружности треугольника ABC, то (1) дает

$$OM^2=s^2R^2-\left(xyc^2+yza^2+zxb^2\right),\qquad(3)$$

где $\vec{OM}=x\vec{OA}+y\vec{OB}+z\vec{OC}$.

Приведем еще два интересных частных случая формулы (1).

Упражнение 3. Докажите, что

а) если точка D лежит на стороне AB треугольника PAB (рис.3) и делит ее в

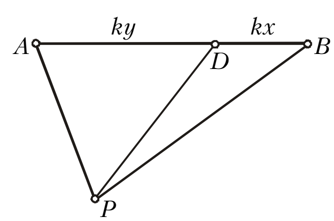

Рис. 3

отношении $AD : DB = y : x$, где $x + y = 1$, то

$$PD^2 = xPA^2 + yPB^2 - xyAB^2$$

(формула Стюарта);

б) расстояние между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника можно найти по формуле

$$OH^2 = 9R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Многочлен треугольника

Один из способов доказать существование треугольника, удовлетворяющего тем или иным условиям, – составить, исходя из этих условий, уравнение