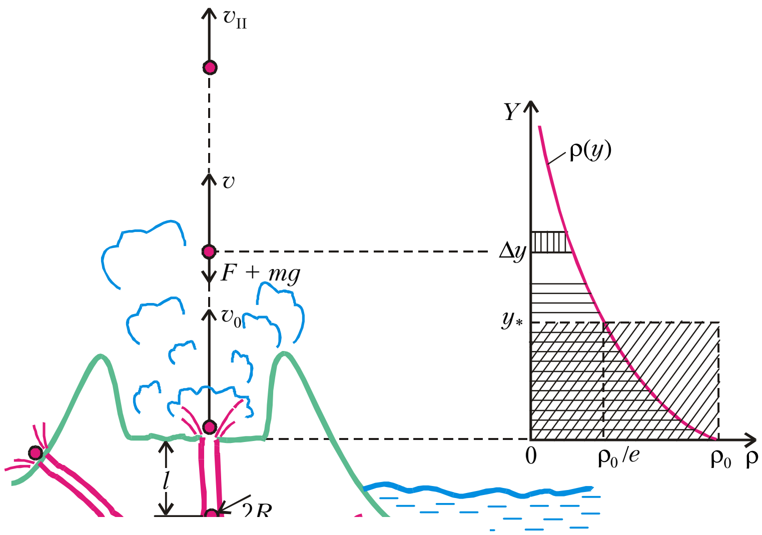

Рис. 1

горой спутника Земли или Солнца? К чему и приступим.

Предположим, что по вертикальному стволу вулкана движется случайно оторвавшаяся «пробка» базальта, лавы или чего-то еще (рис.1). Конечно же, ствол цилиндрический, а пробка шаровая. И оба имеют одинаковый радиус R. А ускоряется эта пробка под действием давления p вулканических газов, намного превышающего атмосферное (по оценкам упомянутой Очень Научной Книги, давление при вулканическом взрыве порядка ста тысяч атмосфер).

По выходе из жерла вулкана эта пробка приобретет наибольшую скорость v_0, после чего она начнет замедляться под действием сил тяготения и сопротивления атмосферы. Кстати, мы здесь не собираемся говорить привычных слов: «сопротивлением воздуха пренебречь», потому что эта начальная скорость заведомо должна превосходить вторую космическую скорость

$$v_{II} = \sqrt{2gR_З} \approx 11 \text{ км/с} \qquad (1)$$

(здесь $R_З$ – радиус Земли) и, следовательно, пробка должна двигаться с большой сверхзвуковой скоростью. Действительно, приняв скорость звука по порядку величины равной $c = 300$ м/с, получим следующее значение отношения скоростей (его называют числом Маха[1]):

$$\frac{v_0}{c} \gtrsim \frac{v_{II}}{c} = \frac{11 \cdot 10^3 \text{ м/с}}{3 \cdot 10^2 \text{ м/с}} \sim 40 .$$

Это уже случай *гиперзвуковых* скоростей, и конструктору летательных аппаратов даже не придет в голову пренебречь сопротивлением воздуха.

Чему же равна эта сила сопротивления? Из соображений размерностей уже не раз получали ее зависимость от плотности воздуха ρ, площади поперечного сечения движущегося тела S и скорости его движения v (проверьте, что слева и справа стоят ньютоны):

$$F = C\rho S v^2 . \qquad (2)$$

А вот безразмерный коэффициент C не может быть определен при помощи размерностей – на то он и безразмерный. Но что удивительно – сам сэр Исаак Ньютон позаботился о нем: для таких гиперзвуковых движений его теоретические рассуждения дают значение $C = 1/2$.

Итак, что же происходит после «выстрела пробки» из вулкана? Ее потенциальная энергия по мере движения вверх вдоль оси Y увеличивается, а кинетическая энергия уменьшается. И мы сказали бы, что их сумма остается постоянной – применили закон сохранения механической энергии, – и получили бы формулу (1). Но это в том случае, если бы эта энергия не тратилась частично на преодоление силы сопротивления воздуха. Значит, здесь мы должны записать, что изменение (убыль) суммарной механической энергии равно работе силы сопротивления F на участке пути Δy:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2} + mgy\right) = -F\Delta y . \qquad (3)$$

Можно показать, что кинетическая энергия тела за пределами атмосферы (на высоте порядка, например, 100 км, характерной для спутников Земли) много больше потенциальной. Действительно, принимая $v = v_{II}$, $g = 10$ м/с^2, $y = 10^5$ м, получим, что $v^2/2$ превышает gy раз в двадцать (а если учесть, что начальная скорость v_0 должна превосходить v_{II}, чтобы «пробить» атмосферу, – то и больше). Таким образом, вторым слагаемым в скобках в уравнении (3) можно пренебречь в сравнении с первым с высокой точностью (ошибка — порядка нескольких процентов).

Сила сопротивления (см. выражение (2)) изменяется не только из-за изменения скорости, но также и вследствие падения плотности воздуха с высотой в соответствии с так называемой *барометрической формулой Больцмана*:

$$\rho = \rho_0 e^{-y/y_*} , \qquad (4)$$

где ρ_0 – значение плотности атмосферы на уровне моря (при $y = 0$), а y_* – характерная толщина атмосферы (порядка высоты Эвереста), на которой значение плотности в $e \approx 2{,}7$ раза меньше, чем ρ_0. Эта зависимость изображена на рисунке 1 справа (значения $\rho(y)$ показаны горизонтальными отрезками). Видно, что плотность атмосферы Земли очень быстро (физики говорят «экспоненциально») падает с высотой.

Зависимость (4) интересна тем, что если мы захотим приравнять массу вертикального столба атмосферы переменной плотности массе столба конечной высоты, но постоянной плотности ρ_0, то для этой высоты и получим значение y_*. Иначе говоря, площадь прямоугольника $\rho_0 y_*$, заштрихованного на рисунке косыми линиями, равна площади под кривой $\rho(y)$. Этот факт нам сейчас и пригодится.

С учетом всего сказанного, уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} = -\frac{S}{m}\left(\rho_0 e^{-\frac{y}{y_*}} \Delta y\right). \qquad (5)$$

Математик скажет, что это похоже на обыкновенное дифференциальное уравнение с разделенными переменными (слева – только v^2, справа – только y). А Новый Русский увидит здесь нечто от сложных банковских процентов (для кинетической энергии).

Теперь ничего не остается сделать, как решить уравнение (5). Конечно, студент первого курса Московского физико-технического института проделает эту операцию в уме. Но и школьник может тут сделать немало. Преж-

[1] *См., например, статью Г.Голицына «От капли до землетрясения» в предыдущем номере журнала. (Прим.ред.)*