Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1681» или «Ф1688». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1683, М1687 и М1688 предлагались на осеннем Турнире Городов 1998 года, а задача М1684 — на Московской математической олимпиаде этого года .

Задачи Ф1689 – Ф1693 и Ф1696 предлагались на втором (очном) туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1681 — М1690, Ф1688 — Ф1697

М1681. Квадрат целого числа оканчивается на ...21. Может ли третья цифра справа быть четной?

В.Сендеров

М1682. Из какой-либо точки плоскости опускаются перпендикуляры на высоты треугольника (или на их продолжения). Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами треугольника, подобного исходному.

Р.Кудинов

М1683. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

А.Гришин

М1684*. Круг разделен радиусами на $2n$ равных секторов, из которых какие-то n – синие, а остальные n – красные. В синие сектора, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны все натуральные числа от 1 до n. В красные сектора, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны все числа от 1 до n. Докажите, что найдется полукруг, в сектора которого вписаны все числа от 1 до n.

В.Произволов

М1685. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности, проведенные через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA, DAB, имеют общую точку, а их центры лежат на одной окружности.

И.Вайнштейн

М1686. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[0;\ 1]$ и удовлетворяют равенствам

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$$

и

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}\, dx = \sqrt{2}\,.$$

Докажите, что $f(x) = g(x)$ на отрезке $[0;\ 1]$.

В.Произволов

М1687. Будем называть *размером* прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместится больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

А.Шень

М1688*. Дана функция $f(x) = \left(x^2 + ax + b\right)/\left(x^2 + cx + d\right)$, где трехчлены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ не имеют общих корней. Докажите, что два утверждения равносильны:
1) найдется числовой интервал, свободный от значений $f(x)$;
2) $f(x)$ представима в виде $f(x) = f_1\left(f_2\left(\ldots f_{n-1}\left(f_n(x)\ldots\right)\right)\right)$, где каждая из функций $f_i(x)$ есть функция одного из видов: $k_i x + m_i$, x^{-1}, x^2.

А.Белов