Суммы квадратов

Если вы внимательно проследите за вычислениями в основном тексте и будете рассматривать упражнения вычислительного характера не только как отнимающие время (неизбежно они обладают этой особенностью), но и как представляющие интерес, доставляющие наслаждение и понимание, то я убежден, что вы сможете оценить как мощь, так и крайнюю простоту теории.

Г.Эдвардс

Таблица сумм квадратов

Рассмотрим таблицу, в верхней строке и левом столбце которой – квадраты целых чисел, а в других клетках – суммы квадратов:

0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
4	5	8	13	20	29	40	53	68	85	104
9	10	13	18	25	34	45	58	73	90	109
16	17	20	25	32	41	52	65	80	97	116
25	26	29	34	41	50	61	74	89	106	125
36	37	40	45	52	61	72	85	100	117	136
49	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149
64	65	68	73	80	89	100	113	128	145	164
81	82	85	90	97	106	117	130	145	162	181
100	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200

Эта таблица позволяет выписать представления: $1 = 1^2 + 0^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $4 = 2^2 + 0^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $8 = 2^2 + 2^2$, $9 = 3^2 + 0^2$, $10 = 3^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$,… Не вошедшие в таблицу числа первой сотни (3, 6, 7, 11, 12, 14, 15,…) в виде суммы двух квадратов не представимы.

Упражнение 1. Найдите наименьшее число, которое двумя существенно разными (т. е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами представимо в виде суммы двух квадратов а) целых; б) натуральных чисел.

Остатки от деления на 3

Наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы двух квадратов целых чисел,– это 3. Кратные 3 числа 6, 12, 15, 21 тоже не представимы, а вот числа $9 = 3^2 + 0^2$ и $18 = 3^2 + 3^2$ – представимы. Возникает гипотеза: числа, которые кратны 3, но не кратны 9, не представимы в виде суммы двух квадратов. Эта гипотеза верна. Верно даже более сильное утверждение:

Теорема 1. *Если сумма квадратов $x^2 + y^2$ целых чисел x, y кратна 3, то числа x, y тоже кратны 3.*

Доказательство. Выпишем остатки от деления квадратов целых чисел на 3:

Закономерность очевидна: остатки периодически повторяются, и никаких остатков кроме 0 и 1 не бывает.

Квадрат	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Остаток	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

(Точнее говоря, остаток от деления квадрата целого числа x на 3 равен 0, если x кратно 3, т. е. представимо в виде $x = 3k$, где k – целое число, и остаток равен 1, если x не кратно 3, т. е. представимо в виде $x = 3k \pm 1$. В самом деле, в первом случае $x^2 = 9k^2$ делится на 3 без остатка, а во втором случае $x^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ дает при делении на 3 остаток 1.)

Суммы остатков 0 + 1 и 1 + 1 не кратны 3. Значит, сумма квадратов $x^2 + y^2$ кратна 3 в том и только том случае, когда x и y кратны 3.

Упражнение 2. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 3^{1999}, то эта сумма кратна 3^{2000}.

Остатки от деления на 7

Следующее после 3 и 6 не представимое в виде суммы двух квадратов число – это 7. Кратные 7 числа 14, 21, 28, 35, 42, 56, 63 не представимы в виде суммы квадратов. Опять возникает гипотеза: *если сумма квадратов $x^2 + y^2$ кратна 7, то и сами целые числа x, y кратны 7.*

Для доказательства составим таблицу остатков от деления квадратов на 7:

Квадрат	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
Остаток	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0

Остатки, как видите, периодически повторяются. Поскольку сумма никаких двух из остатков 1, 2, 4 не кратна 7, мы доказали нашу гипотезу.

Упражнения

3. Остаток от деления квадрата целого числа x на 7 равен 0, если $x = 7k$, где k – целое число; равен 1, если $x = 7k \pm 1$; равен 2, если $x = 7k \pm 3$; равен 4, если $x = 7k \pm 2$. Докажите это.

4. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 21, то она кратна и 441.

5. а) Какие остатки дают квадраты целых чисел при делении на 11? б) Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 11, то она кратна 121. в) Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 1331, то она кратна и 14641.

Остатки от деления на 19

Если простое число p представлено в виде суммы квадратов, $p = x^2 + y^2$, то, очевидно, числа x, y меньше p и потому не могут быть кратны p. Значит, на роль тех чисел p, для которых из делимости суммы квадратов на p следует делимость на p обоих слагаемых, претендуют только числа, не представимые в виде суммы двух квадратов. Любое такое число можно исследовать аналогично числам 3 и 7.

Например, пусть $p = 19$. Составим таблицу остатков от деления квадратов на 19:

Квадрат	0	1	4	9	16	25	36
Остаток	0	1	4	9	16	6	17
Квадрат	49	64	81	100	121	144	169
Остаток	11	7	5	5	7	11	17
Квадрат	196	225	256	289	324		
Остаток	6	16	9	4	1		

В верхней строке – квадраты чисел 0, 1,…, 18. (Другие квадраты можно не рассматривать, поскольку любое целое число x можно представить в виде $x = 19q + r$, где q – целое, $0 \le r \le 18$, и при этом число $x^2 = 19^2 q^2 +$