Вариант 2

1. 1000. **2.** $-1/5$. **3.** $28\sqrt{5}$.

4. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Вариант 3

1. $(-\infty, 5]$. **2.** $5^{\pm\sqrt{1-\log_5 2}}$. **3.** $4\sqrt{5}$.

4. $-\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{4\pi}{27}+\frac{2\pi k}{9}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

5. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. *Указание.* Введите систему координат с началом в точке B', оси Ox, Oy, Oz которой направлены вдоль лучей $B'C'$, $B'A'$, $B'B$ соответственно. Тогда координаты заданных точек имеют вид $P=(x;\ 1-x;\ 0)$, $Q=(x;\ 0;\ 2x)$, а квадрат расстояния между ними равен $5x^2-2x+1$. Расстояние достигает минимума при $x=1/5$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. При неизменных температуре и давлении плотность насыщенного пара не изменяется. Согласно закону сохранения массы, $\rho_ж V_1=\rho_п V_2=m$. Полный объем сосуда равен $V=V_п+V_ж=(1-\eta)m/\rho_п+\eta m/\rho_ж$. Отсюда получаем

$$\eta=\frac{V-V_2}{V_2-V_1}.$$

2. Запишем условия равновесия для случая максимальной длины свисающей части каната:

$$x_{\max}mg=(l-x)mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

и для минимальной длины:

$$x_{\min}mg=(l-x)mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha),$$

где m – масса единицы длины каната.
Отсюда находим

$$l\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\mu\cos\alpha}<x<l\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha}.$$

3. До смены полярности через диод D_1 идет ток, а диод D_2 ток не пропускает. Поэтому конденсатор емкостью C_1 не будет заряжен, а на конденсаторе емкостью C_2 установится заряд $q_2=UC_2$. После смены полярности возможны два варианта.

а) Если $C_1>C_2$, второй конденсатор разрядится полностью, т.е.

$$q_2'=0,\ q_1'=UC_1.$$

б) Если $C_1<C_2$, подтока заряда через перемычку, соединяющую диоды, не будет. Тогда имеем два конденсатора с суммарным зарядом на соединенных обкладках $q_1''+q_2''=UC_2$, причем $U=q_1''/C_1-q_2''/C_2$. Отсюда

$$q_1''=2U\frac{C_1C_2}{C_1+C_2},\ q_2''=UC_2\frac{C_2-C_1}{C_1+C_2}.$$

4. Пусть на глубине h мячик, имеющий первоначально объем $V_0=4\pi R^3/3$ при давлении внутри порядка $p_0=1{,}5p_а=1{,}5\cdot10^5$ Па, деформируется, уменьшив свой объем до V и увеличив давление внутри до $p=\rho gh\gg p_а$, где ρ – плотность воды. Если пренебречь объемом резины при сжатии, то условие затопления мячика можно записать в виде $mg\ge\rho gV$, где m – его масса. По закону Бойля–Мариотта, $p_0V_0=\rho ghV$, откуда $h\sim p_0V_0/(mg)$. Положив радиус мячика $R=0{,}1$ м, массу $m=0{,}3$ кг, $g=10$ м/с^2, получим $h\sim200$ м. Это – большая глубина, при которой объемом резины $V_{рез}$ в сжатом мячике пренебрегать нельзя. Поэтому внесем поправку в выражение выталкивающей силы и запишем условие затопления: $mg=\rho g(V_{рез}+V)$. Масса мячика определяется массой резины: $m\approx\rho_{рез}V_{рез}$. Учитывая, что $V=p_0V_0/(\rho gh)$, получаем

$$h=\frac{p_0V_0}{mg(1-\rho/\rho_{рез})}\sim100\ \text{м}$$

при $\rho_{рез}\sim2\cdot10^3$ кг/м^3. (Заметим, что резина, как все видели, в воде тонет, ее плотность больше, чем у воды, но не очень существенно.)

5. Вначале сила трения первой пробки о стенки трубки почти полностью компенсируется избыточным давлением между пробками. По мере выхода пробки из трубки площадь ее соприкосновения с трубкой и, соответственно, сила трения убывают практически по линейному закону. Ускорение пробки на всем пути, равном ее длине l, нарастает. И пробка, как показывает грубая оценка ее энергии: $mu^2/2\sim\Delta pSl/2$, вылетает из трубки со скоростью u порядка нескольких метров в секунду.

Вариант 2

1. $l=\frac{(l_1v_2)^2-(l_2v_1)^2}{l_1v_2^2-l_2v_1^2}$.

2. Пусть M – искомая масса пыли. После того как вся пыль осядет, суммарный заряд пластинки, равный $qM/m-Q$, создаст электрическое поле напряженностью $E=(qM/m-Q)/(2\varepsilon_0S)$. Сила, действующая на каждую пылинку со стороны электрического поля и равная qE, будет уравновешена силой тяжести mg. Отсюда находим

$$M=m\left(\frac{Q}{q}+\frac{2\varepsilon_0Smg}{q^2}\right).$$

3. Давления в обеих частях цилиндра постоянны и равны

$$p_1=p_0+\frac{mg}{S}\ \text{и}\ p_2=p_1+\frac{mg}{S}=p_0+\frac{2mg}{S}$$

соответственно. Из уравнений Клапейрона–Менделеева получаем связь между приращениями объемов частей цилиндра и приращением температуры:

$$p_1\Delta V_1=\nu_1R\Delta T,\ p_2\Delta V_2=\nu_2R\Delta T.$$

Число молей определяется из начальных условий:

$$\nu_1=\frac{p_1\cdot2hS}{RT_0},\ \nu_2=\frac{p_2hS}{RT_0}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta V_1=\frac{2hS\Delta T}{T_0}=2\Delta V_2.$$

Смещение нижнего поршня $x_2=\Delta V_2/S$, а верхнего $x_1=(\Delta V_2+\Delta V_1)/S=3x_2$. Тепло идет на повышение внутренней энергии и совершение работы:

$$Q=\Delta U+A.$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U=\frac{3}{2}(\nu_1+\nu_2)R\Delta T=\frac{3}{2}(p_1\Delta V_1+p_2\Delta V_2)=\frac{3}{2}(3p_0Sx_2+4mgx_2).$$

Вся работа состоит из работы против внешнего давления и работы против сил тяжести, действующих на поршни:

$$A=p_1(\Delta V_1+\Delta V_2)+mgx_1+mgx_2=3p_0Sx_2+4mgx_2.$$

Окончательно находим

$$x_2=\frac{2Q}{5(3p_0S+4mg)},\ x_1=\frac{6Q}{5(3p_0S+4mg)}.$$

4. Условие начала подъема – равенство силы Архимеда со стороны вытесненного воздуха и суммы сил тяжести оболочки и пара: $m_вg=(m+m_п)g$. Массы воздуха $m_в$ и пара $m_п$