Замечаем, что значение $k = 1$ не удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому в дальнейшем полагаем $k \neq 1$. Подставив выражение $p = \frac{k-1}{10k}$ во второе уравнение системы, получаем $\frac{10k}{k^2-1} = \frac{5}{k-1} + 1$. Решение этого уравнения: $k = 4$. Следовательно, $p = \frac{3}{40}$, и горшок меда был съеден Пятачком с Винни-Пухом за $\frac{1}{p(1+k)} = \frac{8}{3}$ минуты.

2. Пусть Иван купил x больших и x маленьких раков. Это стоит $5x + 3x = 8x$ рублей. Пусть Степан купил y больших и $2y$ маленьких раков. Это стоит $5y + 3 \cdot 2y = 11y$ рублей. Так как затраченные суммы одинаковы, то $8x = 11y$. Отсюда следует, что x делится на 11, т.е. $x = 11k$. Подставляя это значение в приведенное выше равенство, получаем $88k = 11y$, откуда $y = 8k$. В общем, каждый приятель затратил $88k$ рублей, где k – некоторое натуральное число. Однако Иван расплатился одной сторублевкой, и этого хватило, поэтому $88k \leq 100$, и $k = 1$. Итак, раки стоили 88 рублей, поэтому $8x = 11y = 88$, откуда $x = 11$, $y = 8$, $2y = 16$. Таким образом, Иван купил 11 больших и 11 маленьких раков, а Степан – 8 больших и 16 маленьких.

Разберемся со сдачей. Ивану полагается $100 - 88 = 12$ рублей сдачи, которая была выдана натурой, т.е. раками. Такая сумма может быть представлена в ракообразном виде единственным образом – 4 маленьких рака. Степан платил десятками, и, естественно, дал ближайшее значение, большее 88 и кратное 10, т.е. 90 рублей. Ему полагается $90 - 88 = 2$ рубля сдачи, что в жабьем эквиваленте представляет ровно 2 жабы. Итак, приятели унесли с рынка (с учетом покупки и сдачи) всего $11 + 11 + 8 + 16 + 4 + 2 = 52$ животных.

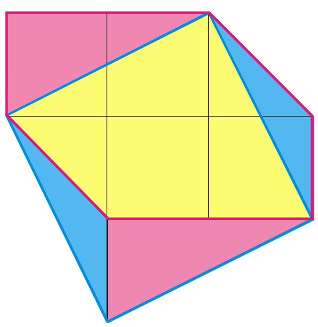

Рис. 1

3. См. рис.1.

4. Так как любое натуральное число a в системе счисления с основанием a записывается как 10, то я задумал число 10.

5. Повернуться должны Джо, Смит и Сэм.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №5 за 1998 г.)

6. Пусть n – количество журналистов, тогда между собой они совершили $\frac{n(n-1)}{2}$ рукопожатий. Действительно, каждый из них совершил $(n-1)$ рукопожатие, но число $n(n-1)$ следует разделить на 2, так как при таком способе подсчета мы каждое рукопожатие посчитали дважды: за одного участника и за другого. Так как было совершено 80 рукопожатий, то $\frac{n(n-1)}{2} \leq 80$. Наибольшее n, при котором выполняется это неравенство, равно 13, так как $\frac{13(13-1)}{2} = 78$; в этом случае президент совершил $80 - 78 = 2$ рукопожатия, т.е. он знаком с двумя журналистами. Меньше 13 журналистов быть не может: если $4x$ меньше 13, то между собой они совершат не больше чем $\frac{12(12-1)}{2} \approx 66$ рукопожатий, и президент должен пожать руки не менее чем $80 - 66 = 14$ журналистам, а их не более 12.

7. Поскольку точка R делит пополам отрезки CE и BD, то $CBED$ – параллелограмм (рис.2). Отрезок QS – средняя линия треугольника CAD, он параллелен CD и равен его половине. А так как CD равен и параллелен BE, то QS – средняя линия и в треугольнике BRE. Значит, $RQ = QB$ И $RS = SE$. Из подобия треугольников CQD и PQB следует, что $BP = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}BE$, аналогично $ET = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}BE$. Следовательно, точки P и T делят отрезок BE на три равные части.

8. Заменим в первой скобке c на $-(a + b)$ и z на $-(x + y)$. Получим $-a^2y(x+y) - b^2x(x+y) + (a+b)^2xy = -a^2xy - a^2y^2 - b^2x^2 - b^2xy + a^2xy + b^2xy + 2abxy = -a^2y^2 + 2abxy - b^2x^2 = -(ay-bx)^2$.

Теперь заметим, что вторая скобка получается из первой заменой a на x, b на y, c на z, поэтому вторая скобка равна $-(xb-ya)^2$.

Произведение обеих скобок равно $(ay-bx)^4$, что является четвертой степенью целого числа, в силу целочисленности чисел a, b, x и y.

9. Попытаемся определить момент времени, в который были включены «зверьки». Так как они были включены одновременно и одновременно достигли трехлетнего возраста, то для первого зверька можно написать уравнение $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 3$. Здесь x – продолжительность «дневного» времени, т.е. времени от 7 до 22 часов, а y – продолжительность «ночного» времени за период достижения «трехлетнего» возраста. Для второго зверька уравнение будет проще: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 3$, или $x + y = 12$. Первое уравнение можно переписать в виде $2x + y = 18$. Если из этого уравнения вычесть второе, то мы получим $x = 6$. Очевидно, что и $y = 6$. Поскольку продолжительность как ночного, так и дневного времени в сутках больше 6 часов, то включение зверьков могло произойти только в два момента времени: или за 6 часов до начала «ночного» времени, т.е. в 16 часов, или за 6 часов до начала «дневного» времени, т.е. в 1 час ночи.

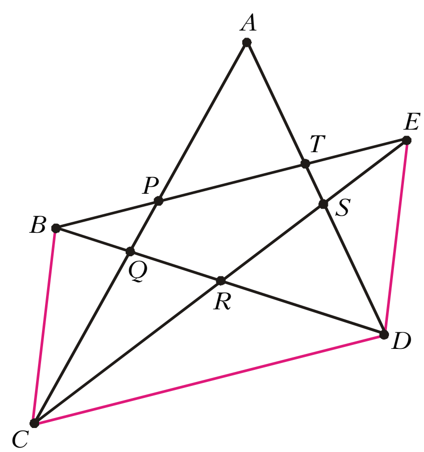

Рис. 2

Теперь рассмотрим моменты «пятилетия» наших зверьков. Для второго зверька «пятилетие» наступает через $5 \cdot 4 = 20$ часов независимо от времени включения.

Найдем момент «пятилетия» для первого зверька в случае, если он был включен в 16 часов. За 6 «дневных» часов от 16 до 22 он повзрослеет на $6/3 = 2$ года. За 9 «ночных» часов от 22 до 7 он повзрослеет еще на $9/6 = 1{,}5$ года. Итого на 3,5 года. Осталось ему повзрослеть в «дневные» часы на 1,5 года, на что ему понадобится $1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ часа. Суммарное время равно $6 + 9 + 4{,}5 = 19{,}5$ часов, что меньше 20 часов для второго зверька.

Если же зверьки были включены в 1 час ночи, то первый