туре 1200 °С, что соответствует температуре плавления магмы. Для упрощения будем считать, что вторжение магмы под ледяной щит имело форму вертикального конуса с круглым основанием, расположенным вертикально под конической воронкой на поверхности. Время поднятия магмы было малым по сравнению со временем теплообмена. Предположим, что тепло распространяется главным образом по вертикали, так что объем воды, образующейся при плавлении льда, все время ограничен конической поверхностью льда, расположенной над центром вторжения магмы. В этих условиях таяние льда происходит в две стадии. Вначале растопленная вода не находилась в состоянии гидростатического равновесия на поверхности магмы и поэтому утекала. Можно считать, что эта вода имела температуру 0 °С. Затем было достигнуто равновесие, вода перестала течь и стала накапливаться над проникшей магмой.

Найдите следующие величины после достижения теплового равновесия: 1) высоту H вершины конуса воды, сформировавшегося под ледяным щитом, относительно первоначальной поверхности нижнего основания ледяного щита; 2) высоту h_1 вторжения магмы; 3) общую массу образовавшейся воды m и массу m^* воды, которая утекла. Начертите в масштабе на миллиметровой бумаге поверхность вторжения магмы и поверхность образовавшейся воды. Используйте такую же систему координат, как на рисунке 5.

Задача 3. Быстрее света?

В этой задаче мы анализируем и интерпретируем измерения радиоизлучений от составного источника в нашей галактике, выполненные в 1994 году. Приемник был настроен на широкий диапазон радиоволн длиной в несколько сантиметров. На рисунке 6 показана серия изображений, записанных в разное время. Линии постоянной интенсивности обозначены контурами – примерно так же, как контуры высот на географической карте. Два максимума интенсивности понимаются как два объекта, удаляющиеся от общего центра, который обозначен на рисунке крестом. (Центр, которой считается зафиксированным неподвижно в пространстве, также является мощным источником излучения, но преимущественно другой длины волны.) Измерения в разные дни были сделаны в одно время суток.

Масштаб рисунка дается в виде отрезка в одну угловую секунду ($1'' = 1/3600°$). Расстояние до небесного тела в центре рисунка, показанного

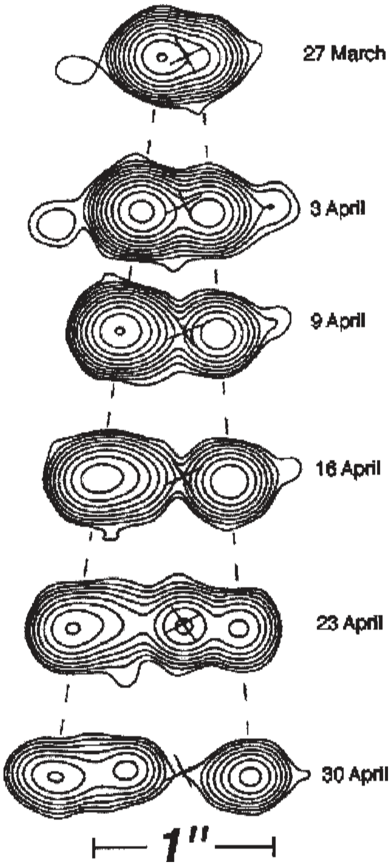

Рис.6. Радиоизлучение от источника в нашей галактике

крестом, оценивается в R = 12,5 кпс (1 кпс = $3{,}09 \cdot 10^{19}$ м). Скорость света $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с. Оценка ошибок при решении не требуется.

a) (2 балла) Обозначим угловые положения двух удаляющихся источников радиоизлучения по отношению к общему центру через $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, где индекс 1 указывает на положение левого источника, 2 – правого, t – время наблюдения. Угловые скорости источников, наблюдаемых с Земли, будем обозначать ω_1 и ω_2. Соответствующие кажущиеся поперечные линейные скорости двух источников обозначим $v'_{1\perp}$ и $v'_{2\perp}$. С помощью рисунка 6 постройте графики зависимостей $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ для определения численных значений ω_1 и ω_2 в угловых миллисекундах в день (мс/день). Найдите также численные значения $v'_{1\perp}$ и $v'_{2\perp}$ (некоторые результаты могут Вас удивить).

b) (3 балла) Чтобы разрешить возникшее в части а) недоумение, рассмотрите источник света, движущийся со скоростью $\vec{v}$ под углом φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ к направлению на удаленного наблюдателя O. Скорость можно записать как $v = \beta c$, где c – скорость света. Расстояние до источника, измеренное наблюдателем, обозначим через R, угловую скорость источника с позиции наблюдателя – через ω, а кажущуюся линейную скорость, перпендикулярную линии наблюдения, – через $v'_{\perp}$. Определите ω и $v'_{\perp}$, выраженные через β, R и φ.

c) (1 балл) Допустим, что два разлетающихся объекта, описанные во введении и в части а), движутся в противоположных направлениях с одной и той же скоростью $v = \beta c$. Тогда результаты части b) позволяют получить β и φ из угловых скоростей ω_1 и ω_2 и расстояния R. Здесь φ – угол, определенный в части b) для левого объекта, соответствующего индексу 1 в части а). Выведите формулы для β и φ через известные величины и определите их численные значения из данных части а).

d) (2 балла) Для модели только с одним объектом, описанной в части b), найдите условие, при котором кажущаяся перпендикулярная скорость $v'_{\perp}$ будет больше скорости света c. Запишите это условие в виде $\beta > f(\varphi)$ и дайте аналитическое выражение функции f. На листе в клетку выделите область плоскости (β, φ), в которой выполняется условие $v'_{\perp} > c$.

e) (1 балл) Для этой же модели только с одним объектом части b) найдите выражение для максимального значения кажущейся перпендикулярной скорости для заданного β. Обратите внимание, что эта скорость стремится к бесконечности при $\beta \to 1$.

f) (1 балл) Оценка значения R, приведенная во введении, не очень надежна. Поэтому ученые начали искать более надежный и прямой метод определения значения R. Вот как, например, это можно сделать. Допустим, что мы можем найти и измерить смещенные по эффекту Доплера длины волн λ_1 и λ_2 для излучений двух разлетающихся объектов, соответствующие известной первичной длине волны λ_0 для этих объектов в состоянии покоя. Используя уравнение для релятивистского эффекта Доплера $\lambda = \lambda_0(1 - \beta\cos\varphi)\big/\sqrt{1-\beta^2}$ и приняв, как ранее, что оба объекта движутся с одной и той же скоростью v, покажите, что неизвестное $\beta = v/c$ может быть выражено через λ_0, λ_1 и λ_2 следующим образом: $\beta = \sqrt{1 - \alpha\lambda_0^2\big/(\lambda_1+\lambda_2)^2}$. Найдите численное значение коэффициента α. Вы можете заметить, что предложенный способ измерения длины волн на практике позволит получить новую оценку расстояния.

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин