

19. При каких целых числах  $n$  число  $\sin \frac{(5n-1)\pi}{6}$  является иррациональным?

20. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник, сторона которого равна  $2\sqrt{2}$ . Найдите объем призмы, если радиус описанной около нее сферы равен  $\sqrt{3}$ .

**Вариант 2**

(факультет экономики и менеджмента)

1. Упростите выражение  $\sqrt{x} - \sqrt{x+2\sqrt{x}+1}$ .

2. Разделите число 120 на две части в пропорции 12 : 3.

3. Упростите выражение  $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 - \operatorname{tg} \alpha}$ .

4. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{2}{3} + \log_9^{-1} 2.$$

5. Решите уравнение  $2^{2x} + 4^{x-1} = 5$ .

6. Решите уравнение  $\lg\left(x - \frac{8}{3}\right) = -\lg x$ .

7. Найдите координаты середины отрезка, ограниченного точками  $A(1; -2)$  и  $B(-3; 4)$ .

8. Найдите сумму всех натуральных чисел  $n$ , для которых выражение  $\frac{6}{n-1}$  является целым числом.

9. Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{2+x}}{x-|x|}.$$

10. Решите уравнение  $\sqrt{x+4} + 2 = \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ .

11. Решите уравнение  $\cos x + \sin 3x = 0$ .

12. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц  $\arcsin\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$ .

13. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^3 - 3x^2 + 6$  на отрезке  $[1; 3]$ .

14. Решите неравенство  $\lg(5x - 4x^2) > 0$ .

15. Решите неравенство  $\frac{x}{(x+2)^2} < 0$ .

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - \sqrt{x+1} = 1, \\ 2y + x = 4. \end{cases}$$

17. Площадь равнобедренной трапеции равна 1. Какое наименьшее значение может принимать сумма  $a + b + 2h$ , где  $a, b$  – основания трапеции, а  $h$  – ее высота?

18. Решите уравнение  $\sin 3x \cdot \cos^2 2x = 1$ .

19. Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , для которого функция  $f(x) = ax^2 + 2ax + 1$  на отрезке  $[-3; 0]$  удовлетворяет неравенству  $|f(x)| \leq 1$ .

20. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус, если длина высоты конуса равна 2, а угол между образующей конуса и его высотой равен  $30^\circ$ .

Публикацию подготовили  
Е.Подсыпанин, С.Преображенский,  
С.Тихомиров

Физико-математический  
колледж при  
«Курчатовском институте»  
МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

**Вариант 1**

1. Решите уравнение  $(x+4) \cdot 3^{1-|x-1|} - x = (x+1) \cdot |3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$ .

2. В окружности единичного радиуса с центром  $O$  проведены два взаимно перпендикулярных диаметра  $AB$  и  $CD$ . Из конца  $D$  одного из диаметров проведена хорда  $DM$ , образующая с  $CD$  угол  $\alpha$ , причем точка  $C$  лежит внутри угла  $AOM$ . Пусть  $N$  – точка пересечения хорды  $DM$  и диаметра  $AB$ . При каком значении угла  $\alpha$  площадь треугольника  $ONM$  будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая площадь?

3. При каких значениях  $\alpha$  неравенство  $x^2 + 4y - 2x + y^2 - \cos \alpha - \sin \alpha + 5 \leq 0$  имеет решение и из него следует неравенство  $1 > x^2 - y - 3x$ ?

4. В каких пределах меняется величина  $3 \arccos x + \arccos y$ , если

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos y)^2 = \frac{9\pi^2}{16}$$

5. В треугольнике  $ABC$  даны радиусы описанной и вписанной окружностей, равные  $R$  и  $r$  соответственно. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  – точки пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  с описанной окружностью. Найдите отно-

шение площадей треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

6. Основанием пирамиды является трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны между собой, большее основание равно  $a$  и тупой угол трапеции равен  $\alpha$ . Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол  $\beta$ . Определите объем пирамиды.

7. Выражение  $x^7 + \frac{1}{x^7}$  представьте в виде полинома от  $a$ , где  $a = x + \frac{1}{x}$ .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

**Вариант 1**

1. Два тела, связанные жесткой нитью, находятся в равновесии на клине (рис.1) даже при условии, что коэффициент трения  $\mu$  между телом  $B$  и плоскостью

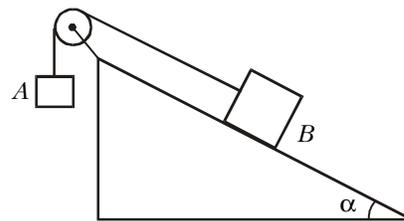


Рис. 1

равен нулю. Систему помещают на тележку, которая начинает двигаться вправо с ускорением  $a$ . При каком минимальном значении  $\mu$  оба тела останутся неподвижными относительно клина? Угол наклона клина  $\alpha$ , ускорение свободного падения  $g$ .

2. В цилиндре объемом  $V_1 = 30$  л находятся в равновесии воздух, вода и насыщенный водяной пар. После изотермического сжатия до объема  $V_1/3$  из цилиндра сливается содержащаяся в нем вода. Затем смесь пара и воздуха изотермически расширяется до объема  $2V_1$ . Найдите полную работу, совершенную внешними силами в этом цикле, если в процессе изотермического сжатия давление в цилиндре возросло от начального значения  $p_1 = 3$  атм до  $p_2 = 5$  атм. Объемом воды в цилиндре можно пренебречь, площадь под изотермой  $pV = \text{const}$  при изменении объема от  $V_1$  до  $V_2$  равна  $p_1 V_1 \ln(V_2/V_1)$ .

3. Длинные вертикальные проводящие рейки расположены в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией  $B$ . По рейкам, расстояние между которыми  $l$ , может скользить без трения проводник массой  $m$  (рис.2). Верхние концы реек замкнуты на резистор с сопротивлением  $R$ , а нижние концы – на конденсатор емкостью  $C$ . В началь-