(Начало см. на с.28)

высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины B. Известно, что углы ABN, NBL, LBM, MBC равны. Найдите углы треугольника ABC.

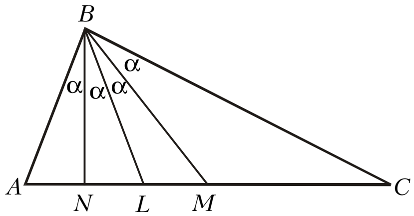

Рис. 12

Первое решение (теорема синусов). Положим $\alpha = \angle ABN$ (рис.12). Тогда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

и

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - 3\alpha.$$

По теореме синусов имеем

$$BM = \frac{AM \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin 3\alpha} = \frac{AM \cos\alpha}{\sin 3\alpha},$$

$$BM = \frac{CM \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{CM \cos 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Так как $AM = CM$, то

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отсюда $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha$, или $\sin 2\alpha = \sin 6\alpha$.

Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то получаем, что $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Поэтому $\angle A = \frac{3\pi}{8}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $\angle C = \frac{\pi}{8}$.

Второе решение (описанная окружность). Пусть O – центр описанной около треугольника ABC окружности и BD – диаметр этой окружности. Так как $\angle BAC = \angle BDC$, то $\angle ABN = \angle CBO$. Следовательно, лучи BM и BO совпадают. Если $O \neq M$, то, так как отрезок OM перпендикулярен AC, медиана BM в этом случае совпадает с высотой BN, в противоречии с условием задачи. Итак, $O = M$ и угол B – прямой. Но тогда $\angle ABN = \frac{\pi}{8}$, $\angle BAC = \frac{3\pi}{8}$ и $\angle BCA = \frac{\pi}{8}$.

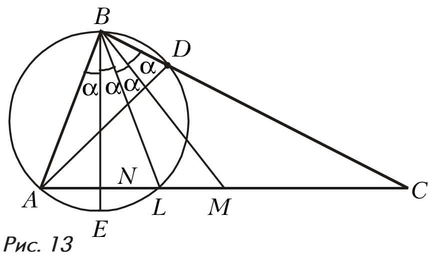

Рис. 13

Третье решение (два диаметра). Проведем окружность через точки A, B, L (рис.13). Центр этой окружности O лежит на луче BN. Пусть BE – диаметр этой окружности, D – точка пересечения окружности со стороной BC. Так как

$$\angle BAD = \angle BED = \frac{\pi}{2} - 3\alpha = \angle BCA,$$

то треугольники DBA и ABC подобны. Следовательно, они делятся одинаковым образом тремя линиями, исходящими из вершины B. Поэтому точка X пересечения отрезков BE и AD должна быть серединой отрезка AD. Итак, диаметр BE делит хорду AD пополам. А это возможно лишь в следующих двух случаях: либо диаметр и хорда перпендикулярны (что явно не выполняется в нашей ситуации), либо хорда сама является диаметром и точка пересечения – центр окружности. Итак, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Четвертое решение (описанная окружность). Пусть P – точка пересечения луча BL с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис.14).

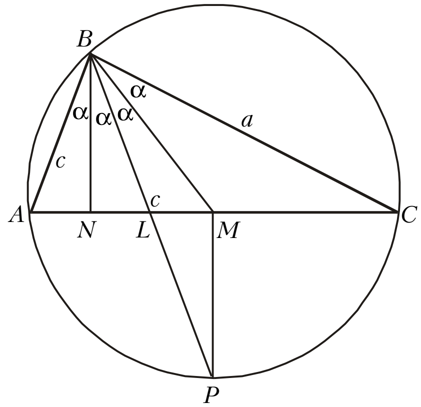

Рис. 14

Следовательно, точка P – середина дуги AC. Поэтому $MP \perp AC$ и, значит, $BN \| MP$. Следовательно,

$$\angle MBP = \angle NBL = \angle MPB.$$

Поэтому $MB = MP$. Тем самым, M – точка пересечения серединных перпендикуляров отрезков BP и AC и, значит, M – центр описанной около треугольника ABC окружности. Поэтому AC – это диаметр и угол ABC равен $\frac{\pi}{2}$.

Пятое решение (площадь). Применяя теорему синусов к треугольнику BML, имеем

$$\frac{BM}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{BL}{\sin(90°-2\alpha)} = \frac{c}{\cos 2\alpha}.$$

Поэтому

$$BM = \frac{c\cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = 2 \cdot S_{BMC} = BM \cdot BC \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{c\cos\alpha}{\cos 2\alpha} a \sin\alpha = \frac{ac \operatorname{tg} 2\alpha}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 4\alpha = \frac{ac \sin 4\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Отсюда $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{2}$ и, значит,

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 0 \cdot$$

Поэтому $4\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

В заключение я хочу принести свою искреннюю благодарность математику из Эссена (Германия) Йоахиму Зукку – благодаря ему я имел возможность ознакомится с материалами, при помощи которых была написана эта статья.