Великолепная десятка

Л.КУРЛЯНДЧИК

В этой статье мы рассмотрим несколько задач, в которых изящество результатов сочетается с наличием красивых решений, по-видимому, не известных широкому читателю.

Начнем с задачи, имеющей очень красивый и неожиданный ответ.

Задача 1 (золотое сечение). *Дан треугольник ABC. Точки P и Q лежат на сторонах AB и AC соответственно, T – точка пересечения отрезков CP и BQ. Где следует выбрать точки P и Q, чтобы площадь треугольника PQT была наибольшей?*

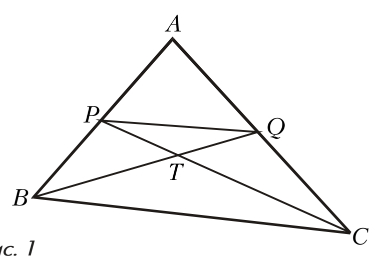

Рис. 1

Решение (векторы). Мы докажем, что площадь треугольника PQT максимальна в случае

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Положим (рис.1)

$$\vec{AB} = \vec{b},\ \vec{AC} = \vec{c},$$

$$\vec{AP} = p \cdot \vec{b},\ \vec{AQ} = q \cdot \vec{c},$$

где $0 < p,\ q < 1$. Тогда

$$\vec{PC} = \vec{c} - p \cdot \vec{b},\quad \vec{QB} = \vec{b} - q \cdot \vec{c}.$$

Пусть

$$\vec{BT} = n \cdot \vec{BQ},\quad \vec{PT} = m \cdot \vec{PC}.$$

Так как

$$\vec{BP} + \vec{PT} = \vec{BT},$$

то

$$(p-1)\vec{b} + m\left(\vec{c} - p \cdot \vec{b}\right) = n \cdot \left(q \cdot \vec{c} - \vec{b}\right),$$

или

$$(p - 1 - pm + n)\vec{b} + (m - qn)\vec{c} = \vec{0}.$$

Следовательно,

$$p - 1 - pm + n = m - qn = 0.$$

Отсюда получаем

$$m = \frac{q(1-p)}{1-pq},\ n = \frac{1-p}{1-pq}.$$

Поэтому

$$\vec{TP} = \frac{q(1-p)}{1-pq}\left(p \cdot \vec{b} - \vec{c}\right),$$

$$\vec{TQ} = \frac{p(1-q)}{1-pq}\left(q \cdot \vec{c} - \vec{b}\right).$$

Итак,

$$S_{PQT} = \frac{1}{2}\left|\vec{TP} \cdot \vec{TQ}\right| = \frac{1}{2} f(p,q)\left|\vec{b} \cdot \vec{c}\right|,$$

где

$$f(p,q) = \frac{pq(1-p-q+pq)}{1-pq}.$$

Так как

$$p + q \geq 2\sqrt{pq},$$

то

$$f(p,q) \leq \frac{pq\left(1 - 2\sqrt{pq} + pq\right)}{1-pq} = \frac{pq\left(1-\sqrt{pq}\right)}{1+\sqrt{pq}},$$

равенство достигается при $p = q$. При помощи дифференцирования легко показать, что при $0 < x < 1$ функция $\frac{x^2(1-x)}{1+x}$ принимает наибольшее значение при $x^2 + x - 1 = 0$, т.е. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, $f(p,q)$ и, значит, S_{PQT} принимают наибольшее значение в случае $p = q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Следующая задача лишь на первый взгляд выглядит довольно мрачно. Мы приведем два красивых решения этой задачи.

Задача 2 (много корней). *Докажите, что для всякого натурального числа* $n \geq 2$ *справедливо неравенство*

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\ldots\sqrt[n]{n}}}} < 2.$$

Первое решение (обратная индукция). Докажем более сильное утверждение, а именно, что для всех натуральных чисел $n \geq m \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sqrt[m]{m\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}}} < 2.$$

Доказывать будем «обратной индукцией», т.е. сначала для $m = n$, а затем «вниз» до $m = 2$.

Ясно, что $\sqrt[n]{n} < 2$.

Для $m < n$ предположим, что

$$\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}} < 2.$$

Тогда

$$\sqrt[m]{m\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}}} < \sqrt[m]{m \cdot 2} \leq 2.$$

Требуемый результат получаем, полагая $m = 2$.

Второе решение (логарифм). Обозначив левую часть неравенства через p, имеем

$$\ln p = \frac{\ln 2}{2!} + \frac{\ln 3}{3!} + \ldots + \frac{\ln n}{n!}.$$

Так как $\frac{\ln x}{x}$ убывает при $x \geq 3$, то

$$\ln p = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right) < \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}(e-2).$$

Следовательно,

$$p < \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{e-2}{3}} \approx 1{,}8397 < 2.$$

Кстати, в качестве оценки снизу имеем

$$\ln p > \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \frac{\ln 2}{2} + e - \frac{5}{2}.$$

Значит,

$$p > \sqrt{2} \cdot e^{e - \frac{5}{2}} \approx 1{,}1423.$$

Следующая задача может быть решена при помощи интегрирования, но имеет и весьма красивое элементарное решение.