v_0. Найдите скорости шайб через большой промежуток времени. Трения нет.

Три расположенные рядом шайбы находятся в состоянии неустойчивого равновесия. Будем считать, что именно налетающая шайба из этого равновесия их выведет. Разлет трех шайб будем рассчитывать без учета импульса и энергии налетающей шайбы – она находится далеко и только нарушает равновесие. Для начала нужно посчитать энергию взаимодействия средней и двух крайних шайб – она равна

$$W = \frac{2kQ^2}{d}$$

(расчет простой – перенесем по очереди три шайбы из бесконечности в заданные точки и просуммируем совершенные работы). На среднюю шайбу со стороны налетающей шайбы действует чуть большая сила, чем на две другие, поэтому предположим, что вначале она смещается чуть вправо относительно других двух шайб (строго говоря, неустойчивое равновесие вещь деликатная, нужно было бы рассмотреть все возможные варианты, но это сделало бы решение чересчур громоздким). Таким образом, после разлета крайние шайбы полетят влево, а средняя – вправо. Обозначим скорости крайних шайб u, тогда скорость средней будет $2u$ (закон сохранения импульса). Из закона сохранения энергии

$$W = \frac{2Mu^2}{2} + \frac{M(2u)^2}{2} = 3Mu^2$$

находим

$$u = \sqrt{\frac{2kQ^2}{3Md}}.$$

Теперь рассмотрим взаимодействие налетающей (движущейся по среднему стержню) шайбы и движущихся навстречу двух крайних шайб. После их взаимодействия и разлета на большие расстояния электрическим взаимодействием между ними можно пренебречь (крайние шайбы по-прежнему летят дуплетом), а сумма кинетических энергий остается неизменной. Скорости теперь можно найти из законов сохранения импульса и энергии, нужно только определить, пролетит ли шайба между парой крайних или отразится. Найдем граничное значение скорости налетающей шайбы $v_{\text{гр}}$, при котором она отразится. Для этого учтем, что в граничном случае скорости выстроившихся в линию шайб будут равны между собой, и найдем их из закона сохранения импульса:

$$Mv_{\text{гр}} - 2Mu = 3Mv, \text{ и } v = \frac{v_{\text{гр}} - 2u}{3}.$$

Разность начальной и конечной кинетических энергий будет равна уже вычисленной величине W:

$$\frac{1}{2}Mv_{\text{гр}}^2 + Mu^2 - \frac{3}{2}Mv^2 = W.$$

Отсюда получаем $v_{\text{гр}} = 2u$.

Если скорость налетающей шайбы будет больше граничного значения $v_{\text{гр}}$, после разлета скорости шайб сохранятся (они как бы пролетают друг сквозь друга) и нужно будет рассчитывать и взаимодействие между улетевшей со скоростью $2u$ средней шайбой и налетающей. Впрочем, это совсем простая задача – при равенстве масс взаимодействующих тел шайбы просто обменяются скоростями, как будто налетающая шайба пролетела насквозь.

Если же скорость налетающей шайбы меньше вычисленного значения $v_{\text{гр}}$, нужно будет решать простую задачу про упругий удар налетающей шайбы и дуплета. Обозначив скорости через v_1 и v_2, запишем законы сохранения импульса и энергии:

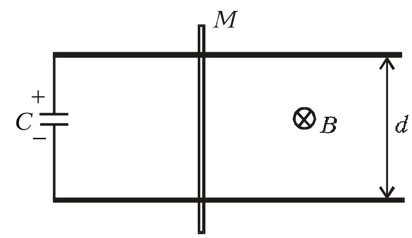
$$Mv_0 - 2Mu = Mv_1 + 2Mv_2, \; Mv_0^2 + 2Mu^2 = Mv_1^2 + 2Mv_2^2$$

и получим

$$v_1 = -\frac{v_0 + 4u}{3} \text{ и } v_2 = \frac{2v_0 - u}{3}.$$

Р.Сашин

Ф1672. *Тяжелый проводящий брусок массой M = 1 кг лежит на горизонтально расположенных рельсах перпендикулярно им (см. рисунок). Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна B = 0,1 Тл. Заряженный до напряжения U = 100 В конденсатор емкостью C = 10 мкФ подключают к рельсам. Считая сопротивление цепи R = 1 кОм достаточно большим, определите установившуюся скорость движения бруска. Расстояние между рельсами d = 1 м. Брусок движется поступательно.*



Для определенности будем считать полярность конденсатора такой, что сила Ампера действует на брусок вправо. По мере разряда конденсатора ток будет уменьшаться, будет уменьшаться и сила, действующая на брусок. Установившееся равномерное движение соответствует нулевой силе; значит, при этой скорости ЭДС индукции будет равна по величине остаточному напряжению конденсатора.

Рассмотрим маленький интервал времени Δt в процессе еще не установившегося движения. Пусть в начале этого интервала скорость бруска равна v, ток в цепи I, сила $F = IBd$, ускорение $a = F/M$. За время Δt изменение скорости составит

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{IBd}{M}\Delta t,$$

а заряд конденсатора изменится на величину

$$\Delta Q = -I\Delta t.$$

Отсюда

$$\Delta v = -\frac{Bd}{M}\Delta Q.$$

Сумма приращений скорости стержня дает установившуюся скорость. С другой стороны, сумма протекших по цепи зарядов определяется разностью начального и конечного (остаточного) зарядов конденсатора. Для установившейся скорости $v_{\text{у}}$ величина ЭДС индукции составляет $Bv_{\text{у}}d$, а суммарный протекший заряд равен $-C(U - Bv_{\text{у}}d)$. Подставляя соответствующие значения, получим равенство

$$v_{\text{у}} = \left(-\frac{Bd}{M}\right)\left(-C\left(U - Bv_{\text{у}}d\right)\right),$$

откуда найдем искомую скорость:

$$v_{\text{у}} = \frac{BdCU}{M + CB^2d^2} \approx 10^{-4} \text{ м/с}.$$

М.Учителев