неверно. Покажем, что тогда существует такое заполнение клеток прямоугольника числами, при котором сумма всех чисел положительна, а сумма чисел в клетках, закрываемых фигурой при любом ее положении, – неположительна.

Введем обозначения: индексом j, $j = 1, \ldots, m\times n$, будем нумеровать клетки прямоугольника, индексом i, $i = 1, \ldots, k$, – положения фигуры Φ на прямоугольнике.

Положим $P_{ij} = 1$, если j-я клетка закрыта фигурой Φ_i, $P_{ij} = 0$, если не закрыта. Тогда набору чисел $\{d_i\}$ соответствует заполнение клеток прямоугольника числами $\theta_j = 1 - \sum_i d_i P_{ij}$, характеризующими уклонение покрытия прямоугольника фигурами от равномерного. По нашему предположению все числа θ_j не могут быть равными нулю.

Выберем числа $d_j \geq 0$ так, чтобы величина $|\theta|$ уклонения была минимальна, где $|\theta|^2 = \sum_j \theta_j^2$. Покажем, что получившиеся числа θ_j образуют искомое заполнение клеток прямоугольника. При этом обоснование существования набора $\{d_i\}$, который минимизирует $|\theta|$, читатель без большого труда проведет самостоятельно.

Заменим одно число d_i на $d_i' = d_i + x$, $x \geq -d_i$. Тогда $\theta_j' = \theta_j - xP_{ij}$, следовательно, $|\theta'|^2 = \sum_j \theta_j'^2 = \sum_j \theta_j^2 - 2x\sum_j \theta_j P_{ij} + x^2 \sum_j P_{ij}^2$, т.е. $|\theta'|^2 = y(x) = ax^2 - 2b_i x + c$. Здесь $a = \sum_j P_{ij}^2 = \sum_j P_{ij} = N$, где N – число клеток в фигуре, $c = |\theta|^2$. Квадратный трехчлен $y = y(x)$, заданный на множестве $x \geq -d_i$, принимает наименьшее значение при $x = 0$ в случае $b_i = 0$, если $d_i > 0$, и в случае $b_i \leq 0$, если $d_i = 0$. Таким образом, предположив, что $|\theta|$ минимален на наборе $\{d_i\}$, мы получаем, что если $d_i > 0$, то $b_i = \sum_j \theta_j P_{ij} = 0$, а если $d_i = 0$, то $b_i \leq 0$. Значит, сумма чисел, закрываемых фигурой Φ_i, а это $\sum_j \theta_j P_{ij}$, – неположительна; с другой стороны, сумма всех чисел в прямоугольнике положительна, так как она равна $\sum_j \theta_j$, а $\sum_j \theta_j = \sum_j \theta_j^2$. Действительно,

$$\sum_j \theta_j^2 = \sum_j \theta_j \left(1 - \sum_j d_i P_{ij}\right) = \sum_j \left(\theta_j - \sum_i d_i \left(\theta_j P_{ij}\right)\right) =$$

$$= \sum_j \theta_j - \sum_{i, d_i > 0} \sum_j \theta_j P_{ij} = \sum_j \theta_j,$$

так как $b_i = 0$ при $d_i > 0$.

Этим завершается решение задачи.

А.Белов

М1660*. *В стране 1998 городов. Из каждого осуществляются беспосадочные авиарейсы в три других города (все рейсы двусторонние). Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.*

Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, ребрами – авиалинии. По условию получится связный граф, степени вершин которого равны трем.

Предположим, что в графе есть два пересекающихся (по вершине) цикла. Тогда рассмотрим вершину O, в которой они «разветвляются». Эта вершина, очевидно, имеет степень три. Удалим эту вершину и три выходящих из нее ребра OA, OB, OC. Нетрудно заметить, что граф сохранил связность, так как существует путь, соединяющий вершины A, B и C.

Рассмотрим полученный граф. Если в нем есть два пересекающихся цикла, то повторим операцию, и так далее. Очевидно, что никакие две удаленные вершины не соединены ребром в исходном графе, так как мы удаляли только вершины степени три, а после каждой операции степени вершин, соседних с удаленными, уменьшались, т.е. они не могут стать равны трем.

Предположим, что в связном графе n вершин и не менее чем $\frac{4}{3}\cdot n$ ребер. Докажем, что в таком графе обязательно есть два пересекающихся цикла. Предположим, что это не так. В силу связности графа в нем можно выделить дерево с n вершинами. Будем «возвращать» в граф оставшиеся после выделения дерева ребра. Добавление каждого ребра увеличивает количество циклов по крайней мере на один. Однако, если какое-либо ребро добавит не менее двух циклов, они будут пересекающимися, что противоречит нашему предположению. С другой стороны, каждый цикл содержит не менее чем три вершины, и никакая вершина не входит в два цикла. Кроме того, дерево с n вершинами содержит ровно $n - 1$ ребро. Следовательно, ребер не более чем $(n-1) + \frac{n}{3} < \frac{4n}{3}$. Противоречие.

Пусть $N = 1998$ – исходное количество вершин, тогда исходное количество ребер равно $\frac{3}{2}N$. За каждую операцию выкидывания вершины количество вершин уменьшается на одну, а количество ребер уменьшается на три. Предположим, что было сделано x операций. Тогда стало $N - x$ вершин и $\frac{3}{2}N - 3x$ ребер. До тех пор, пока выполняется неравенство $\frac{3}{2}N - 3x \geq \frac{4}{3}(N - x)$, вершины удалять можно. Решив это неравенство, получаем $x \leq \frac{N}{10}$, т.е. можно удалить $\left[\frac{1998}{10}\right] + 1 = 200$ вершин. Отсюда и следует утверждение задачи.

Д.Карпов, Р.Карасев

Ф1668. *Автомобиль выезжает из города А и приезжает, двигаясь без остановок по прямому шоссе, в город Б. Оказалось, что в течение первой половины времени поездки его скорость была 40 км/ч, половину оставшегося пути он проехал со скоростью 60 км/ч, а остаток пути – со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля за все время путешествия.*