Ответ: да, существуют. Скажем, что набор чисел удовлетворяет условию U, если произведение любых двух чисел набора делится нацело на квадрат их разности.

Пусть набор $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ состоит из чисел, удовлетворяющих данному условию U. Тогда набор $N_1 = \{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$, где $b_1 = a_1, \ldots, b_n = a_n$, $b_{n+1} = 0$, также удовлетворяет U. Прибавим к каждому b_i число $c = (b_2 - b_1)^2 \cdot (b_3 - b_2)^2 \cdot (b_3 - b_1)^2 \cdot \ldots \cdot (b_{n+1} - b_n)^2$. Получим набор N_2, состоящий из натуральных чисел и также удовлетворяющий U, так как $\left((b_i + c) - (b_j + c)\right)^2 = (b_i - b_j)^2$ и $(b_i + c)(b_j + c) = b_i b_j + c(b_j + b_j + c)$ – делится на $(b_1 - b_j)^2$.

Поэтому, взяв в качестве исходного набора $N_1 = \{1, 2\}$, последовательным применением указанной процедуры мы сможем получить набор из 1998 натуральных чисел, удовлетворяющий условию U.

Г.Гальперин

М1656. *Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше чем $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не пересекаются.*

Обозначим через F_1 и F_2 данные многоугольники. Предположим, что они имеют общую внутреннюю точку. Возможны два случая.

1) Один многоугольник содержится внутри другого, скажем, F_1 лежит внутри F_2. Пусть A – одна из вершин F_1. Тогда, как легко видеть, найдутся три вершины P, Q, R многоугольника F_2 такие, что треугольник PQR содержит A (случай, когда A лежит на стороне треугольника PQR, легко приводит к противоречию). При этом хотя бы один из углов PAQ, QAR, RAP больше 90°. Пусть для определенности $\angle PAQ \geq 90°$. Тогда имеем: $1 \geq PQ^2 \geq AP^2 + AQ^2$. Получаем, что, вопреки условию, один из отрезков AP и AQ не больше $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – противоречие.

2) Сторона одного многоугольника пересекает сторону другого. Пусть, например, сторона AB многоугольника F_1 пересекает сторону PQ многоугольника F_2. Пусть $APBQ$ – выпуклый четырехугольник (случай, когда среди точек A, B, P, Q найдутся три, лежащие на одной прямой, легко рассматривается). Хотя бы один из его углов, скажем PAQ, не меньше 90°. Тогда $1 \geq PQ^2 \geq AP^2 + AQ^2$, следовательно, один из отрезков AP и AQ не больше $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Получаем противоречие.

В.Дольников

М1657. *Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Марья Ивановна пишет программу – конечную последовательность указанных команд – и дает ее Вовочке, после чего Вовочка выбирает лабиринт и помещает ладью на любое поле. Верно ли, что Марья Ивановна может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Вовочки?*

Ответ: верно. Чтобы написать такую универсальную программу, Марья Ивановна может рассуждать таким образом.

Занумеруем возможные начальные положения, т.е. пары (лабиринт, положение ладьи). Их конечное число. Составим программу P_1 обхода всех полей для первого начального положения. Предположим теперь, что начальным было положение номер 2. Применим программу P_1. Если ладья обошла не все поля, допишем в конце несколько команд, чтобы обойти оставшиеся поля. Получим программу P_2. Применим программу P_2 к ладье в третьем начальном положении, снова допишем программу и так далее.

В.Уфнаровский, А.Шаповалов

М1658. *Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа x. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что $S(a + b) < 5$, $S(a + c) < 5$ и $S(b + c) < 5$, но $S(a + b + c) > 50$?*

Подойдут, например, числа $a = 5555554445$, $b = 5554445555$, $c = 4445555555$. Убедимся в этом: $S(a + b) = S(11110000000) = 4$, $S(a + c) = S(10001110000) = 4$, $S(b + c) = S(10000001110) = 4$, $S(a + b + c) = S(15555555555) = 51 > 50$.

Как можно придумать такие числа? Заметим, что $S(2(a + b + c)) = S((a + b) + (a + c) + (b + c)) \leq S(a + b) + S(a + c) + S(b + c) \leq 12$. Значит, число $n = 2(a + b + c)$ при делении на 2 должно резко увеличить свою сумму цифр. Такое возможно, если в числе много единиц, а в частном много пятерок. Возьмем, например, $n = 31111111110$, тогда $S(n) = 12$ и $S(n/2) = 51$. Разложим n на три слагаемых с суммой цифр 4 и меньших $\dfrac{n}{2}$: $n = 11110000000 + 10001110000 + 10000001110$, а затем решим систему уравнений $a + b = 11110000000$, $a + c = 10001110000$, $b + c = 10000001110$. Получим искомый пример.

С.Волченков, Л.Медников

М1659*. *Фигура Ф, составленная из клеток 1×1, обладает следующим свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m \times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Ф можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника под фигурой Ф была положительна (фигуру Ф можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Ф в несколько слоев.*

Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – все возможные расположения фигуры Φ в прямоугольнике. Утверждение задачи можно переформулировать так: можно взять фигуры Φ_i такой толщины d_i, $i = 1, \ldots, k$ (d_i рационально, возможно $d_i = 0$), что суммарная толщина всех фигур Φ_i над каждой клеткой прямоугольника будет равна 1.

Возможность такой переформулировки усматривается из того, что найдется такое натуральное число N, что все Nd_i станут целыми неотрицательными числами.

Предположим, что переформулированное утверждение