стандартном количестве потребляемой воды температура воды в баке составляет +60 °С при температуре окружающего воздуха +20 °С. Какая температура установится в баке при увеличении расхода воды вдвое? Теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур.

А.Зильберман

Ф1685. Оцените, на какой высоте над Землей находится центр тяжести столба воздуха, нависающего над стадионом «Лужники». Когда он расположен выше – летом или зимой? При расчете можно считать, что температура воздуха на любой высоте равна температуре земной поверхности.

А.Чувиков

Ф1686. Сто батареек с одинаковыми параметрами соединили последовательно, при этом двадцать из них оказались подключены с противоположной к остальным полярностью. Концы получившейся цепочки соединили, получив замкнутое кольцо. Параллельно одной из батареек подключили вольтметр (его сопротивление во много раз больше внутреннего сопротивления батарейки), и он показал напряжение 1,6 В. Что покажет вольтметр, если его подключить к какой-нибудь другой батарейке?

М.Учителев

Ф1687. Точечный источник света двигается с постоянной скоростью v_0 по прямой, составляющей небольшой угол α с главной оптической осью собирающей линзы. Траектория источника пересекается с упомянутой осью на двойном фокусном расстоянии от линзы. Найдите минимальную скорость изображения в линзе относительно движущегося источника.

А.Повторов

Решения задач М1651 — М1660, Ф1668 — Ф1672

М1651. *Найдите а) наименьшую, б) наибольшую возможную площадь выпуклой фигуры, все проекции которой на оси Ох, Оу и прямую х = у суть отрезки единичной длины.*

Ответ: а) $\sqrt{2}-1$; б) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$.

Для обоих случаев а) и б) фигура F, о которой идет речь в задаче, заключается внутри шестиугольника, являющегося пересечением трех полос (шириной 1 каждая) (рис.1). Назовем такой шестиугольник накрывающим. В случае б) фигура F совпадает с накрывающим шестиугольником, достигая наибольшей площади тогда, когда накрывающий шестиугольник симметричен относительно обеих диагоналей квадрата. Эта наибольшая площадь равна $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$, как показывают элементарные вычисления.

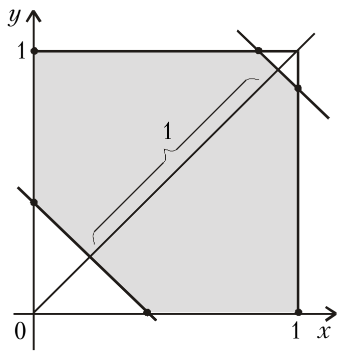

Рис.1

Минимальная площадь фигуры F (случай а)) реализуется на многоугольнике, который на каждой стороне накрывающего шестиугольника имеет по крайней мере одну вершину. Таким многоугольником будет четырехугольник $ABCD$ (рис.2), который во всех разновидностях накрывающих шестиугольников имеет одну и ту же площадь $\sqrt{2}-1$.

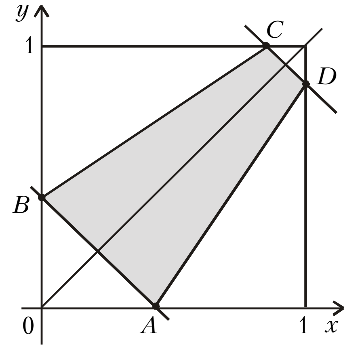

Рис.2

В.Тиморин

М1652. *Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, … так, что каждая окружность ω_{n+1} касается ветвей параболы и внешним образом – окружности ω_n. Найдите радиус окружности ω_{1998}, если известно, что диаметр окружности ω_1 равен 1 и она касается параболы в ее вершине.*

Ответ: $r_{1998} = 1997{,}5$. Обозначим радиус n-й окружности через r_n. Тогда уравнение $(n+1)$-й окружности имеет вид

$$x^2 + \left(y - \left(2r_1 + 2r_2 + \ldots + 2r_n + r_{n+1}\right)\right)^2 = r_{n+1}^2.$$

Поскольку эта окружность касается параболы $y = x^2$, уравнение

$$y + \left(y - \left(2S_n + r_{n+1}\right)\right)^2 = r_{n+1}^2,$$

где

$$S_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

имеет только один корень. Раскрыв скобки, получаем уравнение

$$y^2 - \left(4S_n + 2r_{n+1} - 1\right)y + 4S_n^2 + 4S_n r_{n+1} = 0.$$

Приравняв его дискриминант $\left(4S_n + 2r_{n+1} - 1\right)^2 - 4\left(4S_n^2 + 4S_n r_{n+1}\right) = \left(2r_{n+1} - 1\right)^2 - 8S_n$ нулю, находим (ибо $r_{n+1} \ge 1/2$) величину $r_{n+1} = \left(\sqrt{8S_n} + 1\right)/2$.

По условию задачи, $r_1 = 1/2$. Легко найти $r_2 = 3/2$, $r_3 = 5/2$. Возникает гипотеза, что

$$r_{n+1} = n + \frac{1}{2}.$$

Ее легко доказать по индукции: если $r_n = n - \dfrac{1}{2}$ при некотором натуральном n, то

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{8\left(\frac{1}{2} + \ldots + \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)} + 1}{2} =$$

$$= \sqrt{1 + 3 + \ldots + (2n-1)} + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2}.$$

М.Евдокимов

М1653. *На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые из них перевести вперед. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?*