Задачи
по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 — 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1666» или «Ф1673». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1670—М1672 предлагались на XXXIX Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1673 —Ф1682 (кроме Ф1674) предлагались на первом (заочном) туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1666 — М1675, Ф1673 — Ф1682

М1666. Три плоскости разрезали куб с ребром 1 на 8 параллелепипедов. Докажите, что среди них найдутся 4 параллелепипеда, объем каждого из которых не превосходит $1/8$.

Д.Кузнецов

М1667. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части. Докажите, что в каждой части можно взять по 100 чисел с равными суммами.

В.Произволов

М1668. Имеется n бочек, содержащих 1, 2, ..., n литров воды соответственно. Разрешается доливать в бочку столько воды, сколько в ней уже есть, из любой другой бочки, в которой воды достаточно для такой операции. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одной бочке, если а) $n = 10$; б) n – любое число?

Р.Женодаров, Г.Челноков

М1669. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите равенства

$$\text{НОК}(a,\ b) = \text{НОК}(b,\ c) = \text{НОК}(c,\ a)$$

(НОК – наименьшее общее кратное).

В.Произволов

М1670. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, а стороны AB и CD не параллельны. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей внутри $ABCD$. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников ABP и CDP равны.

(Люксембург)

М1671. На соревновании выступили a участников, их оценивали b судей, где b – нечетное число, не меньшее 3. За выступление участника каждый судья ставил оценку «плюс» или «минус». Число k таково, что для любых двух судей имеется не более k участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$.

(Индия)

М1672. Пусть $d(n)$ – количество всевозможных натуральных делителей числа n, включая 1 и само n. Найдите все натуральные числа k такие, что $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ при каком-либо n.

(Белоруссия)

М1673*. Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами и из нее опущены перпендикуляры на его стороны (рис.1). Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников – красные и синие через один. Докажите, что сумма радиусов окружностей, впи-

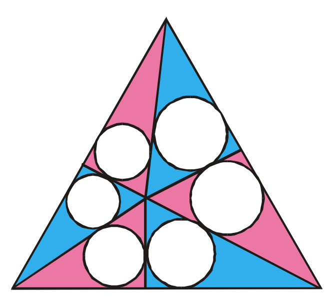

Рис.1

санных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.

В.Произволов

М1674. Функция $f(n)$ определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет условиям

$$f\left(f(n)\right)+f(n)=\begin{cases}2n-1, & \text{если } n \text{ четное;}\\ 2n+1, & \text{если } n \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Найдите значение $f(1999)$.

В.Кириак

М1675*. В тетраэдре $ABCD$: $AB = CD = 2$, $AC = BC = AD = BD = \sqrt{3}$. Докажите, что его можно разрезать а) на 8; б) на 27 подобных ему и равных между собой тетраэдров.

А.Заславский

Ф1673. На гладком клине с углом α при основании находится небольшое тело. С каким вертикальным ускорением нужно двигать клин, чтобы тело оставалось на одной и той же высоте?

А.Клинов

Ф1674. В системе, изображенной на рисунке 2, ускорения блоков направлены по вертикали, куски нитей также вертикальны. С какими силами приходится при этом действовать на блоки? Массы блоков и нитей пренебрежимо малы, нити нерастяжимы.

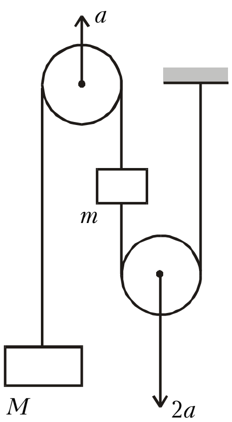

Рис.2

М.Учителев

Ф1675. Для съемок очередного фильма Спилберга был изготовлен макет Земли – в натуральную величину и с той же массой – внутри большого очень легкого пластмассового шара находится тяжелый шар из очень плотного вещества. В результате неточностей при сборке центр масс тяжелого шара оказался смещенным в плоскости экватора на расстояние $d = 100$ км от центра большого шара. Найдите минимальное время оборота спутника, который движется в экваториальной плоскости.

З.Рафаилов

Ф1676. При изучении падения тел в воздухе были получены любопытные результаты. Металлический шарик падал с установившейся скоростью 100 м/с, шарик вдвое большего диаметра из того же металла падал с установившейся скоростью 140 м/с. К маленькому шарику прикрепили длинную нить, и с таким «хвостом» он падал с установившейся скоростью 15 м/с. Когда длину «хвоста» увеличили в два раза, скорость установившегося падения уменьшилась до 9 м/с. Попробуйте оценить скорость падения этого шарика при очень большой длине «хвоста». Считайте, что «хвост» при движении не извивается, а остается вертикальным.

Р.Шариков

Ф1677. В жестком закрытом литровом сосуде находится 900 г воды; воздуха в сосуде нет. Температура внутри сосуда +100 °С. Содержимому сосуда сообщили 1000 Дж тепла. Оцените количество испарившейся при этом воды. Считайте, что при повышении температуры до +101 °С давление насыщенных паров воды увеличивается от 1 атм до 1,04 атм.

Р.Александров

Ф1678. К выводам источника подключают последовательно амперметр и вольтметр, который показывает при этом напряжение 6 В. Когда параллельно ему подключили еще один такой же вольтметр, они в сумме показали 10 В. Подключим параллельно еще очень много таких же вольтметров. Сколько они в сумме покажут? Во сколько раз при этом возрастут показания амперметра?

А.Простов

Ф1679. В вашем распоряжении есть незаряженный конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U конденсатор емкостью 100 C, катушка индуктивности и полупроводниковый диод (никаких других элементов у вас нет). До какого максимального напряжения можно было бы зарядить конденсатор малой емкости, если бы все эти элементы были идеальными? Как для этого нужно было бы действовать? Можете ли вы придумать больше одного способа?

А.Зильберман

Ф1680. В схеме на рисунке 3 поочередно замыкают переключатели (перед замыканием одного из них другой размыкают). Найдите напряжение «среднего» конденсатора после большого числа переключений. Элементы цепи считайте идеальными. Конденсаторы вначале не заряжены.

А.Зильберман

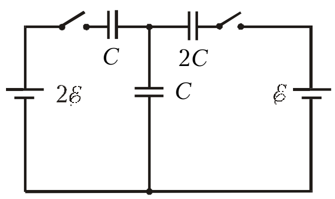

Рис.3

Ф1681. На ферромагнитный кольцевой сердечник с очень большой магнитной проницаемостью намотаны две совершенно одинаковые обмотки – катушки индуктивностью L каждая. Последовательно с одной из обмоток включаем конденсатор емкостью C, к получившейся последовательной цепочке подключаем параллельно вторую обмотку. При помощи генератора синусоидального напряжения и лампочки накаливания исследуем свойства получившейся схемы (рис.4). Как меняется накал лампочки при изменении частоты генератора? Что изменится, если поменять местами выводы одной из обмоток?

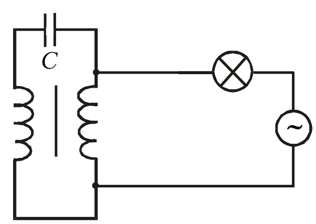

Рис.4

З.Рафаилов

Ф1682. В половине шара радиусом R из прозрачного стекла с коэффициентом преломления $n = 2$ сделано симметричное сферическое углубление так, что толщина стекла на линии центров сфер составляет $R/2$ (рис.5). Точечный источник света помещен в точке A (в центре внешней сферической поверхности). Где его видит наблюдатель, глаз кото-

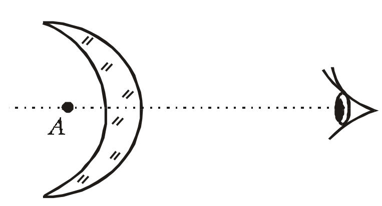

Рис.5

рого находится вдали на линии центров сферических поверхностей?

А.Очков