но тогда

$$\frac{S_{ABL}}{S_{MBN}} = \frac{AB \cdot BL}{MB \cdot BN} = \frac{MB + BN}{AB + BL} = \frac{c}{2b + l},$$

так как из свойств касательных к окружности, вписанной в треугольник ABL, следует равенство

$$AB + BL = 2 \cdot BK + AL = 2b + l.$$

6. $a = -1$, $b \geq 3$, $b \in \boldsymbol{N}$; $a = -2$, $b \geq 4$, $b \in \boldsymbol{N}$.
Указание. Перепишем уравнение так:

$$u + v - |u - v| = 2ab,$$

где $u = \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$, $v = -b \cdot 2^{\sin \pi bx}$. Если $b > 0$, то $u > v$ и мы получаем уравнение

$$-b \cdot 2^{\sin \pi bx} = ab,$$

откуда либо $a = -1$, либо $a = -2$. В первом случае $\sin \pi bx = 0$, т.е. $x = \frac{n}{b}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. При этом должно быть $|x| \leq b$, или $|n| \leq b^2$. Последнее неравенство имеет больше 10 решений, если $b \geq 3$, и меньше 10, если $b \leq 2$. Аналогично, при $a = -2$ получаем, что $b \geq 4$.
При $b < 0$ получается уравнение

$$\arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} = ab,$$

имеющее не больше двух решений при любых a и b.

Вариант 13

1. $[-6; 0)$. **2.** -3. **3.** 7,2%.

4. $\frac{\sqrt{37}(2\sqrt{6} - 1)}{3\sqrt{3}}$. *Указание.* Докажите, что $\angle BCA$ – острый, найдите AC из треугольника ADC, затем синус угла BAC, а затем и BC.

5. 33. *Указание.* Пусть a – первый член, а d – разность прогрессии. Если $a_{17} = u$, $S_n = v$, получаем систему

$$\begin{cases} a + 16d = u, \\ na + \frac{n(n-1)}{2} d = v. \end{cases}$$

Эта система неразрешима или имеет бесконечное число решений тогда и только тогда, когда

$$\frac{n(n-1)}{2} - 16n = 0.$$

6. *Указание.* а) Это параболы

$$x = -\frac{9}{2} y^2 - y + 9 \text{ и } y = x^2 - 2x.$$

б) Умножив первое уравнение на $8/9$ и сложив его со вторым уравнением, получим после преобразований уравнение окружности радиусом $\sqrt{161}/9$:

$$\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}.$$

Вариант 14

1. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\pm\sqrt{\log_2 \frac{6 + \sqrt{26}}{5}}$.

3. $(-2; 2) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$. **4.** $8\sqrt{\frac{2}{3}} > 6{,}5$. **5.** $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

6. 49 и 83. *Указание.* Пусть m, $n \in \boldsymbol{N}$ – искомые числа. По условию задачи

$$mn + 372 = 90n + 29, \text{ т.е. } n(90 - m) = 7^3,$$

причем $29 < n < m < 90$. Поэтому числа n и $90 - m$ являются делителями числа 343, что приводит к единственной возможности:

$$\begin{cases} n = 49, \\ 90 - m = 7. \end{cases}$$

7. $a = 2$. *Указание.* Пусть $z = x^2$. Рассмотрим уравнение

$$z^2 - (a-1)(a+3)z + (a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0.$$

Система имеет 3 решения, если это уравнение имеет корни $z_1 = 0$, $z_2 > 0$. Но тогда

$$(a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0; \quad (a-1)(a+3) > 0.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. При решении задачи будем, как обычно, пренебрегать влиянием воздуха на движение снаряда и его частей. Используем декартову систему координат, направив ось OX вдоль горизонтальной составляющей начальной скорости снаряда, а ось OY – вертикально вверх. Обозначим скорости частей снаряда сразу после взрыва $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Поскольку первая часть снаряда полетела вертикально, горизонтальная составляющая ее скорости сразу после взрыва равна нулю: $u_{1x} = 0$. Пренебрегая импульсом сил тяжести за время взрыва и массой сгоревшей при взрыве части снаряда, на основании закона сохранения импульса получим, что горизонтальная составляющая второго осколка сразу после взрыва составляет $u_{2x} = 2v\cos\alpha$ (при этом было учтено, что снаряд разорвался на две равные части). Поскольку взрыв снаряда произошел в верхней точке траектории, согласно закону сохранения импульса, вертикальные составляющие скоростей осколков должны удовлетворять соотношению $u_{1y} + u_{2y} = 0$. Учитывая, что $u_2 = nu_1$, $u_1 = u_{1y}$ и $u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}$, из составленных уравнений находим скорость первого осколка сразу после взрыва: $u_1 = (2v\cos\alpha)\big/\sqrt{n^2 - 1}$. После взрыва оба осколка совершают свободное падение; следовательно, один осколок относительно другого движется с неизменной скоростью, а потому искомое расстояние равно $L(\tau) = u_{\text{отн}}\tau$, где $\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. После алгебраических преобразований получим

$$L(\tau) = \tau\sqrt{(2v\cos\alpha)^2 + (2u_1)^2} = 2v\tau\sqrt{\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1}}\cos\alpha.$$

2. На рисунке 5 показаны силы, действующие на шарик: силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ и сила тяжести $m\vec{g}$. При этом, как обычно, мы пренебрегли силами, действующими на шарик со стороны воздуха. Обозначим угол между плоскостью, в которой располагаются нити, и осью вращения через φ. Поскольку ось вращается равномерно, траектория шарика имеет вид окружности, расположенной в горизонтальной плоскости. Учитывая, что шарик подвешен на одинаковых нитях, прикрепленных симметрично к горизонтальной штанге, можно показать, что радиус этой окружности равен $r = L\cos(\alpha/2)\sin\varphi$. Поскольку нити расположены симметрично, их силы натяжения равны по модулю: $T_1 = T_2 = T$. В соответствии со вторым законом Ньютона, запишем уравнения движения шарика в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$ma = m\omega^2 r = 2T\cos(\alpha/2)\sin\varphi, \quad 0 = mg - 2T\cos(\alpha/2)\cos\varphi.$$

Сила натяжения нитей при любых угловых скоростях враще-