По теореме синусов для ΔACD:

$$\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{AC}{\sin\angle CDA},$$

откуда

$$\sin\angle CDA = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(=\cos\frac{\pi}{8}\right).$$

Значит, $\beta = \angle KAD = \frac{\pi}{8}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{24}$. Поэтому $\angle CAB = = \frac{5}{24}\cdot\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$, значит, $2R = \frac{AC}{\sin\angle CBA}$ и $R = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}\right)} = = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $\frac{\pi n}{5}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **2.** 4; 8. **3.** $(-\infty; 3/2)$.

4. $\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}$. **5.** $(-1; 1)$.

6. $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$. *Указание.* Площадь четырехугольника удобно найти по формуле: «полупроизведение диагоналей на синус угла между ними». Угол между диагоналями AM и BN легко вычисляется через α, если заметить, что $OD || BM$, где OD – радиус окружности с диаметром CB.

7. $\left(-\infty; \log_a\frac{5}{3-a}\right)$ при $0<a<1$;

$\left(\log_a\frac{5}{3}; \log_a\frac{5}{3-a}\right)$ при $1<a<3$;

$\left(\log_a\frac{5}{3}; +\infty\right)$ при $a\geq 3$.

8. $\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$. *Указание.* Параллельный перенос одной из диагоналей, например A_1B в положение A_2A, дает треугольник A_2C_1A с заданным углом α, все стороны которого выражаются через $x = AB = A_2A_1 = A_1C_1$, после чего x находится по теореме косинусов.

Вариант 5

1. 0. **2.** $[-3; 1)$. **3.** $(-1; 1; \pm 2)$. *Указание*. Приведите первое уравнение к виду $(x+1)^2+(y-1)^2=0$.

4. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$t^2-(\cos 2x+\cos 6x)t+1=0,$$

где $t = \sin x$. Его дискриминант $(\cos 2x+\cos 6x)^2-4\geq 0$, откуда следует, что либо $\cos 2x + \cos 6x = 2$, либо $\cos 2x + \cos 6x = -2$. В первом случае $\sin x = 1$, но тогда $\cos 2x + \cos 6x = -2$ — противоречие. Во втором случае $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\cos 2x + \cos 6x = -2$.

5. 27/4. *Решение.* По свойству пересекающихся хорд $CE\cdot ED = AE\cdot BE$, откуда $CE = 3$.

Пусть O – центр окружности, а $\angle AOC = \alpha$. Тогда $\angle ACD = = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CKB = \alpha$. Прямоугольные треугольники COK и BOK равны. Поэтому $\angle OKB = \frac{1}{2}\angle CKB = \frac{\alpha}{2}$, $\Delta ACE \sim \Delta OKB$ и $KB = \frac{OB}{AE}\cdot CE = 15$. Так как $CD\perp AB$, то $CD || KB$ и $\Delta AME \sim \Delta AKE$, откуда $ME = KB\cdot\frac{AE}{AB} = \frac{3}{2}$ и $S_{\Delta CKM} = \frac{1}{2}CM\cdot BE = \frac{27}{4}$.

6. 1/4. *Указание.* После замены $y = 4x + 1$ уравнение приводится к виду

$$\log_5(y+3)\left(\log_2 y - \log_3(y+1)\right) = = \log_3(y+1)\left(\log_5(y+3)-\log_4(y+2)\right). \quad (*)$$

Нетрудно видеть, что $y = 2$ – корень уравнения $(*)$. Функция

$$f(y) = \log_2 y - \log_3(y+1) = \frac{\log_2 y(\log_2 3 - 1) - \log_2\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\log_2 3}$$

является возрастающей как сумма двух возрастающих функций ($\log_2 y$ возрастает, $-\log_2\left(1+\frac{1}{y}\right)$ – тоже возрастает). Следовательно, $f(y) < 0$ при $0 < y < 2$ и $f(y) > 0$ при $y > 2$.

Аналогично, функция

$$g(y) = \log_5(y+3)-\log_4(y+2)$$

– убывающая, обращающаяся в нуль при $y = 2$, поэтому $g(y) > 0$ при $0 < y < 2$ и $g(y) < 0$ при $y > 2$.

Вариант 6

1. $\frac{2-7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}+10}$. **2.** $[-6; -1]\cup[0; +\infty)$.

3. πn, $-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

4. 91/25. *Указание.* Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\angle AOB = 135°$, откуда $AB = 5$, радиус вписанной окружности $\frac{3}{5}$, периметр треугольника ABC равен 56/5.

5. $t = 1$; $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Первое неравенство приводится к виду

$$3\left(2^t-2\right)^2+2\left(\sin 5x+\frac{1}{2}\right)^2\leq 0,$$

откуда $t = 1$, $\sin 5x = -\frac{1}{2}$.

Вариант 7

1. 7/9. **2.** $-1/\sqrt{10}$; $|\cos\alpha/2|$.

3. $(-3; -2)\{-1\}\cup(0; 1)$. *Указание.* Выполните замену $t = = |x+1|$ и примените метод интервалов.

4. $\left(-1; 1/\sqrt{3}\right)$, $(3/2; 9)$.

5. 25/72. *Указание.* Часть куба, содержащая точку B_1, – треугольная пирамида, от которой отрезаны «угловые тетраэдры». Считая, что ребро куба равно 1, найдите объемы упомянутых пирамид.

6. а) $|a|\leq\sqrt{26}+1$; б) $|a|\leq\sqrt{26}-1$. *Указание.* Преобразуем уравнение к виду

$$(5+\cos b)\cos x+(1+\sin b)\sin x = a,$$

или

$$\sqrt{27+10\cos b+2\sin b}\,\sin(x+\varphi) = a,$$