



Рис. 4

Теперь рассмотрим развертку нашего куба (рис.4). В выделенных клетках стоят числа одного типа, зависящего только от того, какого типа число стоит вместо звездочки. Но две из выделенных клеток имеют общую сторону, значит, и сумма чисел в этих клетках должна делиться на 3. Это возможно лишь в том случае, когда числа в выделенных клетках – «тройки», но тогда и звездочка – это «тройка», и, как легко видеть, вся развертка должна быть заполнена «тройками». Но «троек» не хватает – их всего 8.

4. а) Легко проверить, что числа 131052, 131053, 131054, 131055, 131056 удовлетворяют условию задачи.

б) Докажем, что каждое из  $\underbrace{1300\dots01052}_{6n}$ ,  $\underbrace{1300\dots01053}_{6n}$ ,

$\underbrace{1300\dots01054}_{6n}$ ,  $\underbrace{1300\dots01055}_{6n}$ ,  $\underbrace{1300\dots01056}_{6n}$  делится на сумму своих цифр при любом целом неотрицательном  $n$  (в частности, при  $n = 332$  отсюда будет следовать утвердительный ответ на пункт б) задачи). Сумма цифр числа  $\underbrace{1300\dots01052}_{6n}$  делится на 3, а само число делится на 4, следовательно, оно делится и на 12 – сумму своих цифр. Аналогично проверяется делимость числа  $\underbrace{1300\dots01055}_{6n}$  на сумму своих цифр – число 15.

Из разложений

$$\underbrace{1300\dots01056}_{6n} = 16 \cdot (13 \cdot 10^{6n} \cdot 5^4 + 66),$$

$$\underbrace{1300\dots01053}_{6n} = 13 \cdot (13 \cdot 10^{6n+4} + 81)$$

следует, что каждое из данных чисел делится на сумму своих цифр (соответственно на 16 и 13). Четное число  $\underbrace{1300\dots01054}_{6n}$  делится на 7 – в этом можно убедиться, например, применив процесс деления «уголком», – следовательно, оно делится и на сумму своих цифр (число 14).

5. Однозначные квадраты 1, 4, 9 взаимно просты, поэтому в искомом наборе не может быть более одного однозначного квадрата. Среди двузначных квадратов существует не более двух квадратов с различными цифрами, имеющих отличный от 1 общий делитель, – это числа 36 и 81. Таким образом, в искомом наборе могут быть лишь следующие комплекты чисел:

одно четырехзначное, два двузначных, одно однозначное; два трехзначных, одно двузначное, одно однозначное.

В первом случае четырехзначный квадрат должен быть образован цифрами 2, 4, 5, 7, но таких квадратов не существует (см. таблицу квадратов).

Рассмотрим второй случай. Если однозначный квадрат равен 4, то двузначное число должно выбираться среди чисел 16, 36, 64 – в любом из них присутствует цифра 6. Но среди четных трехзначных квадратов с различными цифрами 196, 256, 324, 576, 784 присутствует либо цифра 4, либо цифра 6. Следовательно, и этот случай невозможен. Если же однозначный квадрат равен 9, то двузначный квадрат может быть либо 36, либо 81. Привлекая таблицу квадратов, находим единственно возможный набор: 9, 81, 324, 576.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Стержень, отбрасывающий тень, должен быть направлен к Северному полюсу мира (в северном полушарии).
2. Нет – с понижением уровня чернил в капельнице промежуток времени между моментами падения капель увеличатся.
3. Катера подойдут к плоту одновременно.
4. Точка пересечения графиков означает, что в этот момент времени тела имеют одинаковые по модулю скорости. Определить, когда тела встретятся, по этим графикам невозможно.
5. Пути, пройденные шариками, равны, а средняя скорость у второго шарика больше; следовательно, он быстрее достигнет точки  $B$ .
6. Движение вагона не влияет на характер движения тела по вертикали, поэтому во всех трех случаях тело будет падать в течение одного и того же времени.
7. Если учесть сопротивление воздуха, то вертикальная составляющая ускорения тела на любой высоте при подъеме больше, чем при спуске. Значит, время подъема будет меньше времени спуска.
8. Когда муха перелетает вверх, дно пробирки несколько опускается относительно центра масс системы «пробирка – муха», движущегося с ускорением свободного падения. Таким образом, дно пробирки ударится о землю быстрее, чем в том случае, когда муха будет оставаться неподвижной.
9. И земля, и канат действуют на обоих гимнастов одинаковым образом; следовательно, гимнасты достигнут блока одновременно.
10. Не зависит, поскольку уменьшение веса песка компенсируется силой, с которой ссыпавшийся песок ударяет о дношко.
11. Длительное действие остановившегося мальчика вызвало большую деформацию льда.
12. Период колебаний маятника станет бесконечно большим; иначе говоря, с наступлением невесомости колебания прекратятся.
13. Период колебаний груза уменьшится вдвое, так как жесткость шнура возрастет в четыре раза.
14. Чтобы измерить время между излучением и приемом отраженной от цели волны.
15. Молния имеет значительные размеры, звук от более удаленных ее участков запаздывает и растягивается во времени. Скорость же света так велика, что его запаздывание незаметно, и сверканье молнии ощущается как одна вспышка.

### Микроопыт

Поскольку уменьшается длина подвеса груза, период колебаний уменьшается.

### ВПИСАННЫЕ МНОГУГОЛЬНИКИ

2. Точка пересечения прямых, выбранная точка и основания перпендикуляров лежат на одной окружности.
4. У квадратного уравнения только два корня.
5. Разложите какое-нибудь число на множители разными способами.
7. Вдохновившись равенствами  $1 \cdot xy = x \cdot y = y \cdot x$ , домножим числа 1,  $x$ ,  $y$  на сумму  $xy + y + x$ , а числа  $xy$ ,  $y$ ,  $x$  – на сумму  $1 + x + y$ . Получим набор чисел  $a = xy + y + x$ ,  $b = x(xy + y + x)$ ,  $c = y(xy + y + x)$ ,  $d = xy(1 + x + y)$ ,  $e = y(1 + x + y)$ ,  $f = x(1 + x + y)$ , удовлетворяющий системе (2) статьи.
9. Заномеруем вершины 1998-угольника по кругу. Поскольку отрезки не пересекаются, с любой стороны от любого из них должно лежать четное число вершин. Тогда каждый отрезок соединяет вершину с четным номером с вершиной, номер которой нечетен. Нарисуем стрелки так, чтобы полученные векторы вели из нечетных вершин в четные. Каждый вектор ра-