ГАУССОВЫ СУММЫ

2. а) Сложите векторы рисунка 1, где $|\vec{OA}| = ax$, $|\vec{OB}| = bx$.

б) Сложите векторы рисунка 2, где $|\vec{OA}| = ax$, $|\vec{OB}| = |\vec{OC}| = bx$.

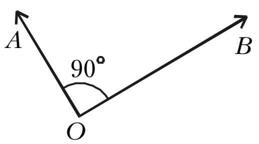

Рис. 1

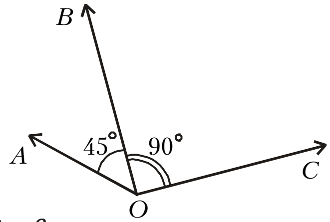

Рис. 2

5. $\sqrt{n/2} = \left|(1-\zeta)\left(1-\zeta^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\zeta^{(n-2)/2}\right)\right|$.

6. а) n; б) $n^{n/2}\cdot R^{n(n-1)/2}$.

7. В формулу (3) подставьте $n = 5$, $z = 2$. (Применив теорему косинусов, можно доказать, что $PB = \sqrt{6-\sqrt{5}}$ и $PC = \sqrt{6+\sqrt{5}}$.)

8. а) $|1-\zeta^k|$ – длина хорды, стягивающей дугу величиной $2\pi k/n$. Поэтому $|1-\zeta^k| = 2\sin(\pi k/n)$ (здесь $k = 1,\ldots,\frac{n-1}{2}$).
б) $\sqrt{n}/2^{(n-1)/2}$.

9. в) Поскольку $4\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$, имеем $\sqrt{5} = 2\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{3\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$, откуда получаем представление

$$\sqrt{5} = \left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

числа $\sqrt{5}$ в виде суммы корней 10-й степени из единицы.

10. а) $S_5 = 1 + 4\cos\frac{2\pi}{5} = 1 + 4\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$.

б) $S_7 = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^{16} + \zeta^{25} + \zeta^{36} = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^2 + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta = 1 + 2(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4)$. Вычислим сначала вещественную часть: $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{8\pi}{7} = 1 + \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) = 0$, ибо сумма семи векторов рисунка 1 текста статьи равна нулю. Теперь вычислим мнимую часть: $2\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7}\right) = 8\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7} = \sqrt{7}$. Итак, $S_7 = i\sqrt{7}$.

в) $S_8 = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^{16} + \zeta^{25} + \zeta^{36} + \zeta^{49} = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta + 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta = 2 + 4\zeta + 2\zeta^4 = 4\zeta = 2\sqrt{2}(1+i)$; $S_9 = 3 + 2(\zeta + \zeta^4 + \zeta^7) = 3$; $S_{10} = 0$.

11. а) Если $n = 2m$, где m нечетно, то $\zeta^{(m+t)^2} = \zeta^{m^2+2mt+t^2} = \left(\zeta^m\right)^m\cdot\left(\zeta^n\right)^t\cdot\zeta^{t^2} = (-1)^m\cdot\zeta^{t^2} = -\zeta^{t^2}$ при $t = 1,\ldots, m$.

б) Обозначив $a = k - m$, получим

$$S_n\overline{S_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{k^2-m^2} = \sum_{a=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{(a+m)^2-m^2} = \sum_{a=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{a^2+2am} = \sum_{a=0}^{n-1}\zeta^{a^2}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{2am}.$$

При $a = 0$ или $a = n/2$ все n слагаемых суммы $\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{2am}$ равны 1. При всех остальных значениях a сумма $\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{2am}$ равна 0. Следовательно,

$$S_n\overline{S_n} = \left(1+\zeta^{(n/2)^2}\right)n = 2n.$$

12. Поскольку $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$, сопряженное к S_p число есть сумма $\overline{S_p} = 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4} + \ldots + \zeta^{-(p-1)^2}$. Можно доказать две сформулированные ниже леммы. Из леммы 1 следует, что если простое число p имеет вид $p = 4k + 1$, где k – натуральное число, то последняя сумма отличается от суммы $S_p = 1 + \zeta + \zeta^4 + \ldots + \zeta^{(p-1)^2}$ только порядком слагаемых, так что $\overline{S_p} = S_p$ и $S_p^2 = S_p\overline{S_p} = p$. А из леммы 2 следует, что если $p = 4k + 3$, то рассматриваемые суммы имеют только одно общее слагаемое – число 1. При этом $S_p + \overline{S_p} = 2(1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{p-1}) = 0$, так что $S_p^2 = S_p\cdot\left(-\overline{S_p}\right) = -p$.

Лемма 1. Для простого $p = 4k + 1$ существует такое целое число x, что $x^2 + 1$ кратно p. (Другими словами, -1 является квадратичным вычетом по простому модулю $p = 4k + 1$.)

Лемма 2. Для простого $p = 4k + 3$ сравнению $x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$ удовлетворяют только кратные числу p целые числа x, y. (В частности, -1 не является квадратичным вычетом по простому модулю $p = 4k + 3$.)

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 4 за 1998 г.)

1. *Ответ*: да, существует. Если $ABCDE$ – правильный пятиугольник, то требуемым свойством обладает, например, четырехугольник $ABCD$.

2. Нетрудно заметить, что точки P и Q симметричны относительно центра O параллелограмма (рис.3). Из равенства площадей треугольников PBM и POM, а также равенства площадей треугольников QCM и QOM, с учетом равенства площадей треугольников POM и QOM, следует требуемое равенство площадей треугольников PBM и QCM.

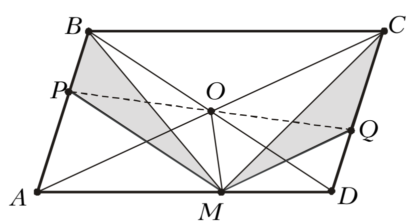

Рис. 3

3. *Ответ*: нет. Сумма двух чисел делится на 3, если либо оба числа делятся на 3, либо одно из них при делении на 3 дает остаток 1, а другое – остаток 2. Все числа, написанные на квадратах, разобьем на три группы:
1) делящиеся на 3;
2) дающие при делении на 3 остаток 1;
3) дающие при делении на 3 остаток 2.
В каждой группе по 8 чисел, и мы можем считать, что у нас имеется 8 «единиц», 8 «двоек» и 8 «троек».