

и $Q'S'$ соответственно. Найдите длину отрезка $K'L'$, если $P'K' : K'R' = 3:2$, $Q'L' : L'S' = 2:3$.

5. Найдите все действительные значения c , для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

6. Вокруг треугольника MKN описана окружность с радиусом r и центром в точке O . Длина стороны NM равна a . Для сторон треугольника, выполнено соотношение $HK^2 - HM^2 = HM^2 - MK^2$. Найдите площадь треугольника OKL , где L — точка пересечения медиан треугольника MKN .

7. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов A и B общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида A была больше цены одной акции вида B . К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определите цену продажи одной акции видов A и B .

Вариант 12

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$|4x - |x - 2|| + 3| = 16.$$

2. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{1}{2} \log_1 \left(\frac{2401}{36} \right) + 2 \quad \text{или} \quad \text{tg} \left(\frac{226\pi}{17} \right)?$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{4x+7} - 3x + 5}{16 - 3x^2 + 22x} \leq 0.$$

4. Решите уравнение

$$\text{tg} 8x - \text{tg} 6x = \frac{1}{\sin 4x}$$

при $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$.

5. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l , в треугольник ABL вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K , $BK = b$. На сторонах AB и BC в $\triangle ABC$ выбраны точки M и N соответственно, так что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, причем $MB + BN = c$. Найдите отношение площадей треугольников ABL и MBN .

6. Найдите все целые значения параметров a и b , при которых уравне-

ние

$$\arcsin \left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} \right) - b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} - \left| \arcsin \left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} \right) + b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} \right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Вариант 13

(социологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-3}{3x} \geq \frac{1}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 5) = \frac{3}{2} \log_{\sqrt{8}}(1 - x).$$

3. 9% коренного населения города N в зимний период занято народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет $\frac{4}{5}$ от численности в зимний период. Определите, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, косинус угла ADC равен $\frac{1}{2}$, синус угла BCA равен $\frac{1}{3}$. Найдите сторону BC , если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC , проходит также и через точку D .

5. Найдите все натуральные значения параметра n , при каждом из которых задача «Найти арифметическую прогрессию, если известны ее семнадцатый член и сумма n первых членов» не имеет решений или ее решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

6. Две кривые на плоскости $(x; y)$, заданные уравнениями

$$y = x^2 - 2x \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{9} + y = 1,$$

пересекаются в четырех точках. Докажите, что

1) существуют по крайней мере две различные параболы, каждая из которых проходит через эти четыре точки; 2) эти четыре точки лежат на одной окружности, и найдите радиус этой окружности.

Вариант 14

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$$

2. Решите уравнение

$$2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3|x| - 11}{x - 3} > \frac{3x + 14}{6 - x}.$$

4. В треугольнике ABC известны стороны $BC = AC = 12$, $AB = 6$; AD — биссектриса. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ADC . Выясните, что больше: R или 6,5.

5. Решите неравенство

$$\log_{2x-3}(\sqrt{x+2} + x - 3) \leq 1.$$

6. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найдите эти числа.

7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - \\ - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Снаряд, вылетев из пушки со скоростью v под углом α к горизонту, разорвался на две равные части в верхней точке траектории. Первая часть полетела вертикально вверх, а скорость второй части оказалась в n раз больше скорости первой. Найдите расстояние между осколками через время τ после разрыва, если к этому моменту еще ни один осколок не долетел до земли.

2. Шарик массой m прикреплен двумя невесомыми нерастяжимыми нитями длиной L каждая к горизонтальной штанге, симметрично закрепленной на вертикальной оси, вращающейся с угловой скоростью ω (рис.1). Угол между нитями α . Найдите силы натяжения нитей.

3. Из листовой резины склеили трубку радиусом r и, заткнув один конец, стали надувать ее воздухом. Когда давление внутри трубки превысило атмос-