Об амплитудах колеблющихся величин

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – важнейший вид механического движения. Поэтому полезно обратить внимание на некоторые особые свойства этого движения.

Известно, что при гармонических колебаниях смещение x тела от положения равновесия зависит от времени t по закону

$$x = X\cos(\omega t + \delta).$$

Здесь X – величина максимального смещения, т.е. амплитуда смещения тела от положения равновесия, ($\omega t + \delta$) – фаза колебаний, ω – циклическая (круговая) частота колебаний, δ – начальная фаза колебаний.

Дифференцирование смещения x по времени t позволяет найти проекцию скорости v_x колеблющегося тела на координатную ось OX:

$$v_x = -X\omega\sin(\omega t + \delta).$$

Произведение величин X и ω в правой части этого равенства имеет смысл величины максимальной скорости V, т.е. амплитуды скорости колеблющегося тела. Таким образом, амплитуды скорости и смещения связаны соотношением

$$V = X\omega. \qquad (1)$$

Дифференцируя проекцию v_x скорости по времени t, находим проекцию a_x ускорения колеблющегося тела на ось OX:

$$a_x = -X\omega^2\cos(\omega t + \delta).$$

Произведение величин X и ω^2 в правой части равенства – это величина максимального ускорения A, т.е. амплитуды ускорения колеблющегося тела. Иными словами, амплитуды ускорения и смещения связывает выражение

$$A = X\omega^2. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно получить по-другому. Их вывод основан на том, что если точка C равномерно с линейной скоростью V и угловой скоростью ω движется по окружности радиусом X (рис.1), то ее проекция B на координатную ось OX совершает гармонические колебания с циклической частотой ω. Из кинематики движения по окружности известно, что линейная скорость V, угловая скорость ω и радиус вращения X связаны соотношением, совпадающим с соотношением (1), а центростремительное ускорение A выражается через радиус X и квадрат угловой скорости ω формулой, совпадающей с выражением (2).

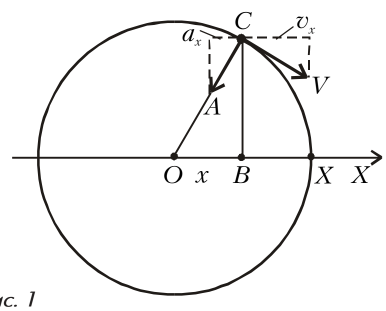

Рис. 1

Обратим внимание еще на одно важное свойство гармонических колебаний. При рассмотрении колебаний в механике часто удобнее их описывать не на языке сил, а на языке энергий. Допустим, исследуемая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии описываются формулами

$$E_p = \frac{\alpha x^2}{2}, \; E_k = \frac{\beta (x')^2}{2},$$

где α и β – положительные постоянные величины (параметры системы), x и x' – смещение от положения равновесия и его первая производная по времени, т.е. проекция скорости v_x. Закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta (x')^2}{2} = \text{const}. \qquad (3)$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим дифференциальное уравнение

$$x'' + \frac{\alpha}{\beta}x = 0,$$

где x'' – вторая производная от x по времени, т.е. проекция ускорения a_x. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$x = X\cos(\omega t + \delta),$$

причем для циклической частоты находим

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \qquad (4)$$

Таким образом, приходим к выводу, что если энергия исследуемой системы описывается формулой (3), то движение является гармоническим колебанием с циклической частотой, определяемой соотношением (4).

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. *К пружине жесткостью k, один конец которой закреплен, подвешен груз массой m, лежащий на подставке так, что пружина не растянута (рис.2). Подставку быстро убирают. Найдите величины максимальной скорости и максимальной силы упругости пружины при дальнейшем движении груза.*

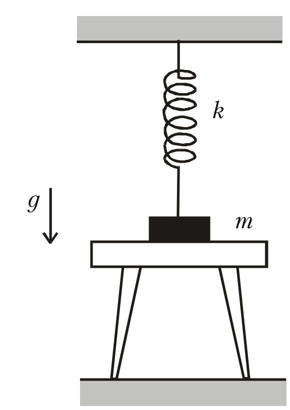

Рис. 2

Положение равновесия находится ниже начального положения груза на $X = mg/k$. Колебания смещения x груза относительно положения равновесия будут происходить по закону $x(t) = X\cos\omega t$ (ось OX направлена по вер-