Случай $n = 8$

Обратимся к пункту б) задачи М1624. Пусть диагонали вписанного восьмиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ пересекаются под равными углами в точке P (рис. 13). Опустим из центра O описанной окружности перпендикуляры OB_1, OB_2, OB_3 и OB_4 на диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 и A_4A_8. Получим, в силу упражнения 3, квадрат $B_1B_2B_3B_4$, на описанной окружности которого лежит точка P. Если бы длины всех отрезков PA_i ($i = 1,\ldots, 8$) были рациональны, то и длины отрезков $PB_1 = \left(PA_5 - PA_1\right)/2$, …, $PB_4 = \left(PA_4 - PA_8\right)/2$ были бы рациональны, что противоречит равенству $PB_1 + PB_3 = \sqrt{2}PB_2$ упражнения 1.

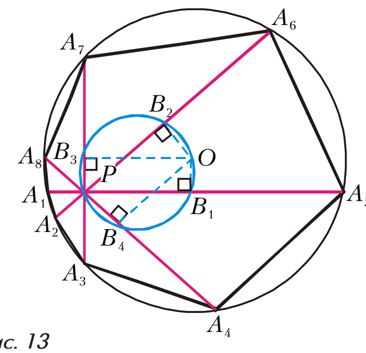

Рис. 13

Случай четного $n > 6$

Займемся пунктом д) для четных n. Пусть, для определенности, центр O окружности лежит внутри угла A_2PA_3. Обозначим $\angle OPA_2 = \theta$. Опустим перпендикуляры PB_1, PB_2 и PB_3 на прямые PA_1, PA_2 и PA_3. Тогда

$$PB_1 = OP\cos\left(\frac{\pi}{n} + \theta\right),$$

$$PB_2 = OP\cos\theta,$$

$$PB_3 = OP\cos\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right),$$

откуда

$$PB_1 + PB_3 = $$

$$= 2OP\cos\theta\cos(\pi/n) = 2PB_2\cos(\pi/n),$$

т. е. $\cos(\pi/n) = \left(PB_1 + PB_3\right)/\left(2PB_2\right)$.

Если бы длины всех отрезков PA_i были рациональными, то и длины

$$PB_1 = \left(PA_1 - PA_{n+1}\right)/2,$$

$$PB_2 = \left(PA_2 - PA_{n+2}\right)/2,$$

$$PB_3 = \left(PA_3 - PA_{n+3}\right)/2$$

были бы рациональными. Но при $n > 3$ число $\cos(\pi/n)$ иррационально (доказательство см. в *Приложении*).

Случай нечетного $n > 3$

Продолжим каждый из лучей A_iP, где $i = 1,\ldots, n$, до пересечения с окружностью в точке B_i. В силу упражнения 13,

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n =$$

$$= PB_1 + PB_2 + \ldots + PB_n. \quad (4)$$

По свойству хорд,

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = \ldots = PA_n \cdot PB_n.$$

Значит, величина $PA_i \cdot PB_i = c$ одна и та же для всех $i = 1,\ldots, n$.

Предположим, что все длины PA_i рациональны. Подставив выражения $PB_i = c/PA_i$ в формулу (4), получим равенство

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n =$$

$$= c\left(\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \frac{1}{PA_n}\right),$$

из которого следует, что c – рациональное число. Значит, рациональны и все выражения $PB_i = c/PA_i$. В предыдущем разделе доказано, что такого не бывает.

Приложение

В заключение докажем иррациональность чисел вида $\cos(\pi/n)$, где n – натуральное число, $n > 3$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Существуют многочлены с целыми коэффициентами T_n и Q_{n-1} степеней, соответственно, n и $n - 1$, для которых*

$$\begin{cases} \cos n\alpha = T_n(\cos\alpha), \\ \sin n\alpha = \sin\alpha\, Q_{n-1}(\cos\alpha). \end{cases}$$

Следствие из леммы 3. *Если число $\cos\alpha$ рационально, то рациональны и все числа вида $\cos k\alpha$, где $k = 1, 2, \ldots$*

Доказательство леммы 3. Применим индукцию. База очевидна: при $n = 1$ имеем $T_1(x) = x$ и $Q_0(x) = 1$.

Переход тоже не сложен:

$$\begin{cases} \cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha = \\ = T_n(\cos\alpha)\cos\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right)Q_{n-1}(\cos\alpha), \\ \sin(n+1)\alpha = \cos n\alpha\sin\alpha + \sin n\alpha\cos\alpha = \\ = T_n(\cos\alpha)\sin\alpha + \sin\alpha\, Q_{n-1}(\cos\alpha)\cos\alpha. \end{cases} \quad (5)$$

Лемма доказана. По индукции из формул (5) легко вывести утверждение следующей леммы.

Лемма 4. *Старшие коэффициенты многочленов T_n и Q_{n-1} равны 2^{n-1}.*

Подготовка закончена. Пора пристально взглянуть на число $x = \cos(\pi/n)$, где n – натуральное число, $n > 3$. Предположим, что число x рационально, и разберем несколько случаев.

Если n делится на 4, то противоречие очевидно:

$$1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4) = \cos\left(\frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{4}\right)$$

оказывается, в силу следствия из леммы 3, рациональным числом.

Если n нечетно, воспользуемся равенством

$$-1 = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right) = T_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Оно означает, что x удовлетворяет уравнению $T_n(x) + 1 = 0$. Как известно, рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами имеют вид p/q, где p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента. В нашем случае q оказывается степенью двойки, а p равно 1, поскольку при нечетном n свободный член многочлена $T_n(x) + 1$ равен 1 (свободный член многочлена T_n можно найти очень легко, подставив $\alpha = \pi/2$ в тождество $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$). Значит, $x = 1/2^k$ для некоторого целого неотрицательного k. Осталось вспомнить, что $x = \cos(\pi/n) > \cos(\pi/3) = 1/2$ – и противоречие получено.

Случай, когда n обладает нечетным делителем $m > 3$, тоже легко привести к противоречию:

$$\cos\frac{\pi}{m} = \cos\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{n}\right).$$

А больше никаких случаев рассматривать не надо – любое натуральное число $n > 3$ делится на 4 или имеет нечетный делитель, больший числа 3.