6. Придумайте решение системы (2) в натуральных числах, не все из которых равны друг другу.

Указание. Воспользуйтесь числами, найденными в предыдущем упражнении, и домножьте их разумным образом.

7. Придумайте бесконечную серию решений системы (2), отличную от $a = b = c = d = e = f$.

Свойство пятиугольника

Задача 3. *На дуге AE описанной окружности правильного пятиугольника ABCDE отмечена точка X. Докажите, что* $AX + CX + EX = BX + DX$.

Первое решение (тригонометрическое). Проведем диаметр XX' (рис.10). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$, $XX' = d$.

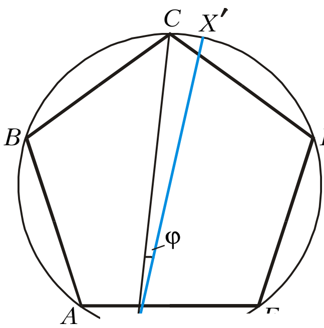

Рис. 10

Тогда треугольник AXX' прямоугольный, откуда $AX = XX'\cos\angle AXX' = d\cos(72°+\varphi)$. Аналогично, $BX = d\cos(36°+\varphi)$, $CX = d\cos\varphi$, $DX = d\cos(36°-\varphi)$, $EX = d\cos(72°-\varphi)$. Значит, осталось проверить тождество

$$\cos(72°+\varphi) + \cos\varphi + \cos(72°-\varphi) = \cos(36°+\varphi) + \cos(36°-\varphi).$$

Поскольку

$$\cos(72°+\varphi) + \cos(72°-\varphi) = 2\cos 72°\cos\varphi,$$
$$\cos(36°+\varphi) + \cos(36°-\varphi) = 2\cos 36°\cos\varphi,$$

достаточно доказать равенство $\cos 36° - \cos 72° = 1/2$.

Домножим его левую часть на $\sin 36°$:

$$\cos 36°\sin 36° - \cos 72°\sin 36° = \frac{1}{2}\sin 72° - \frac{1}{2}(\sin 108° - \sin 36°) = \frac{1}{2}\sin 36°,$$

что и требовалось.

Замечание. Равенство $\cos 36° - \cos 72° = 1/2$ можно доказать проще, проведя биссектрису KN угла K равнобедренного треугольника KLM с углом при вершине $\angle M = 36°$ и основанием $KL = 1$ (рис. 11). Возникнут равнобедренные треугольники LKN и KNM. Значит, $MN = NK = KL = 1$. Опустив перпендикуляры MM_1 и NN_1 на основание треугольника, получим: $KN_1 =$

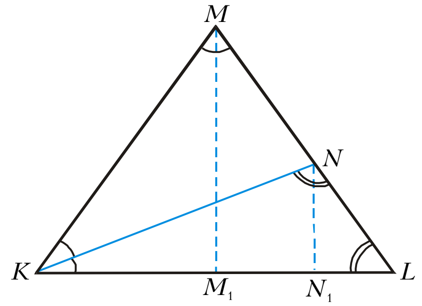

Рис. 11

$= \cos 36°$, $M_1N_1 = MN\cos 72° = \cos 72°$,

$$\cos 36° - \cos 72° = KN_1 - M_1N_1 = KM_1 = 1/2.$$

Второе решение (со скалярными произведениями). Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ единичной длины вдоль лучей XA, XC, XE, а векторы $\vec{b}$, $\vec{d}$ – вдоль

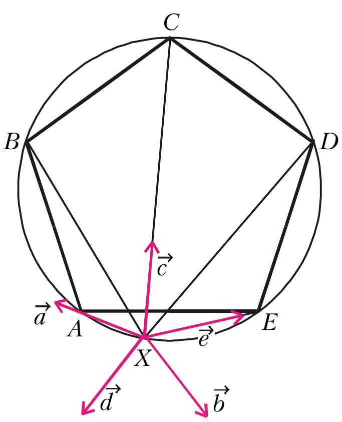

Рис. 12

лучей BX и DX (рис. 12). Тогда $AX = \vec{a}\cdot\vec{XX'}$, $CX = \vec{c}\cdot\vec{XX'}$, $EX = \vec{e}\cdot\vec{XX'}$, $BX = -\vec{b}\cdot\vec{XX'}$, $DX = -\vec{d}\cdot\vec{XX'}$. Значит,

$$AX + CX + EX - BX - DX = (\vec{a}+\vec{c}+\vec{e}+\vec{b}+\vec{d})\vec{XX'}.$$

Проверим равенство $\vec{a}+\vec{c}+\vec{e}+\vec{b}+\vec{d} = 0$. Для этого заметим, что по теореме о вписанном угле прямые AX, BX, CX, DX и EX пересекаются под равными углами. Если бы сумма $\vec{s} = \vec{a}+\vec{c}+\vec{e}+\vec{b}+\vec{d}$ была отлична от $\vec{0}$, то вектор $\vec{s}$ изменялся бы при повороте на 72°. Но при этом повороте слагаемые $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$, $\vec{c}$ всего лишь переставляются местами, переходя в $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ соответственно.

Упражнения

8. Докажите, что для любого правильного многоугольника сумма векторов, проведенных в его вершины из центра описанной окружности, равна нулю.

9. 999 непересекающихся отрезков с концами в вершинах правильного 1998-угольника разбивают эти вершины на пары. Докажите, что на отрезках можно так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю. *(Санкт-Петербургская математическая олимпиада 1998 года, С.Берлов)*

10. Правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность с радиусом R и центром O. Пусть P – произвольная точка этой окружности. Докажите, что сумма проекций на прямую OP всех n векторов, соединяющих точку P с вершинами n-угольника, равна nR.

11. Вычислите суммы косинусов

а) $\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$,

б) $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$,

в) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$,

г) $\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{2\pi j}{2k+1}$, где k – натуральное число,

д) $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$,

е) $\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}$, где k – натуральное число.

Указание. Прочитайте статью Н.Васильева и В.Сендерова «Про угол $\pi/7$ и $\sqrt{7}$» в «Кванте» №2 за 1996 год или статью «Гауссовы суммы» в этом номере.

12. а) Докажите, что для любой точки X дуги A_1A_7 описанной окружности правильного семиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ верно равенство

$$A_1X + A_3X + A_5X + A_7X = A_2X + A_4X + A_6X.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон.

13. а) Докажите, что если диагонали A_1A_6, A_2A_7, A_3A_8, A_4A_9, A_5A_{10} вписанного десятиугольника пересекаются под равными углами в точке P, то

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 + PA_9 = PA_2 + PA_4 + PA_6 + PA_8 + PA_{10}.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многоугольника с четным числом сторон, не делящимся на 4.

в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для 12-угольника.

14. Решите задачу 3 третьим способом, применив теорему Птолемея к четырехугольникам $ABCX$, $BCDX$, $CDEX$, $DEXA$ и $EXAB$.