Поскольку $AX = DP$, $BY = EP$, $CP = FZ$, задача 2 сводится к проверке равенства $XP = YP + ZP$. Оно обеспечено задачей 1, поскольку треугольник XYZ равносторонний (по теореме о вписанном угле, $\angle YZX = \angle YPX = 60°$ и $\angle XYZ = \angle XPZ = 60°$).

Аналогичное задаче 2 утверждение можно сформулировать и в случае, когда точка P лежит вне шестиугольника. А именно, если под углом 60° друг к другу провели три прямые, которые пересекли некоторую окружность, как

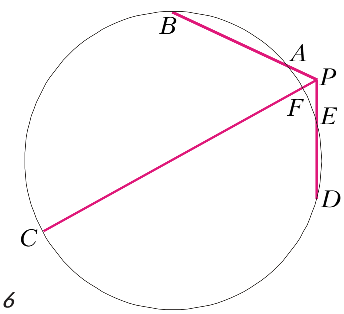

Рис. 6

показано на рисунке 6, то легко доказать равенство

$$-AP + CP - EP = BP + DP - FP.$$

Оно аналогично равенству (1), только некоторые отрезки «взяты со знаком минус».

Упражнения

2. Через точку проведены три прямые под углом 60° друг к другу. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами равностороннего треугольника.

3. а) Через точку провели четыре прямые под углом 45° друг к другу (рис. 7). Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами квадрата.

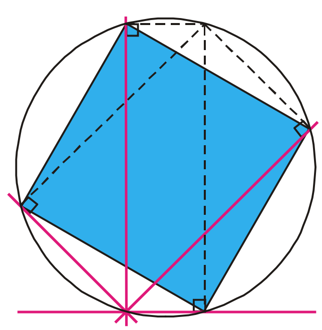

Рис. 7

б) Окружность разделили диаметрами на равные дуги и из произвольной точки опустили перпендикуляры на эти диаметры. Докажите, что основания этих перпендикуляров – вершины правильного многоугольника (который вырождается в точку, если «опускать перпендикуляры» из центра окружности, и вырождается в «двуугольник», если окружность разделили двумя диаметрами на четыре равные дуги).

Случай $n = 4$

Займемся пунктом а) задачи М1624. Напомним, что если хорды KM и LN окружности пересекаются в точке S, то $KS \cdot MS = LS \cdot NS$. Более того, легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Если отрезки KM и LN пересекаются в точке S, то необходимым и достаточным условием принадлежности точек K, L, M и N одной окружности является равенство $KS \cdot MS = LS \cdot NS$.*

В силу леммы, для построения примера к пункту а) достаточно взять любые два перпендикулярных отрезка,

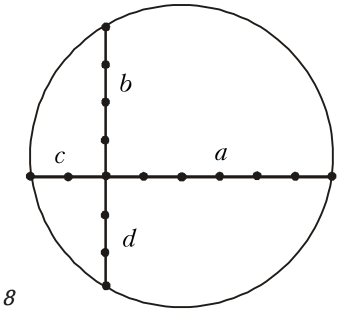

Рис. 8

которые делятся точкой пересечения на такие отрезочки длин a, b, c, d, что $ac = bd$. Годятся, например, $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 2$ (или $a = 6$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 3$, как на рисунке 8).

Случай $n = 6$

Для вписанного шестиугольника $ABCDEF$, диагонали AD, BE, CF которого под равными углами пересекаются в точке P, как мы доказали, выполняются равенства

$$\begin{cases} a + c + e = b + d + f, \\ ad = be = cf, \end{cases} \qquad (2)$$

где $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$, $d = PD$, $e = PE$, $f = PF$.

В пункте в) задачи М1624 мы должны выяснить, могут или нет все длины a, b,…, f быть рациональными, если точка P не является центром окружности.

Лемма 2. *Если на пересекающихся под углом 60° друг к другу прямых от точки их пересечения P отложить отрезки $PA = a$, $PB = b$, …, $PF = f$, для которых выполнены равенства (2), то получится вписанный шестиугольник $ABCDEF$.*

Доказательство. Отложим сначала на двух прямых отрезки $PA = a$, $PB = b$, $PD = d$, $PE = e$. В силу леммы 1, точки A, B, D, E попадут на одну окружность. Рассмотрим точки C' и F' пересечения этой окружности с третьей прямой и обозначим $c' = PC'$, $f' = PF'$. Тогда

$$\begin{cases} a + c' + e = b + d + f', \\ ad = be = c'f', \end{cases} \qquad (3)$$

где c' и f' – это вовсе не производные, а всего лишь длины отрезков PC' и PF'.

Из систем (2) и (3) имеем

$$\begin{cases} c - c' = f - f', \\ cf = c'f'. \end{cases}$$

Запишем первое уравнение в виде $c - f = c' - f'$, возведем в квадрат и прибавим к результату учетверенное второе уравнение:

$$(c + f)^2 = (c' + f')^2.$$

Значит, $c + f = c' + f'$. Вспомнив уравнение $c - f = c' - f'$, получаем $c = c'$, $f = f'$. Лемма 2 доказана.

Упражнение 4. Придумайте другой способ доказательства равенств $c = c'$, $f = f'$, основанный на том, что числа c и $-f$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 - (c - f)x = cf$, а «другими» корнями того же самого уравнения являются числа c' и $-f'$.

Чтобы построить пример к пункту в), осталось предъявить решение системы (2) в натуральных числах a, b, c, d, e,

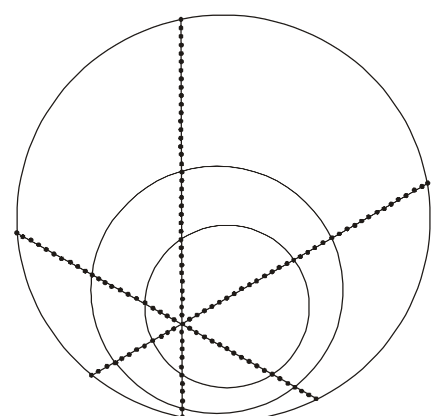

Рис. 9

f, не все из которых равны друг другу. На рисунке 9 приведено даже три примера. Хотите узнать, как их придумали? Решите следующие три упражнения!

Упражнения

5. Придумайте натуральные числа, не все из которых равны друг другу, удовлетворяющие уравнениям $ad = be = cf$.