Поляризованный диэлектрик и его энергия

Е. ВЫРОДОВ, В. СЛЕПНЕВ

ФИЗИКУ, ИЗУЧАЕМУЮ В школе, иногда называют элементарной. Это действительно так – в школьной программе нет сложных, трудных для понимания законов, решение задач не требует высшей математики. Однако и в элементарной физике можно найти немало очень глубоких вопросов, ответы на которые совсем не очевидны. Посмотрите, какая дискуссия развернулась на одном из факультативных занятий в нашей школе. Участвовали в ней учитель физики (Учитель) и два школьника (Володя и Антон). Началась она с очень простого вопроса, а закончилась...

Учитель. Тема нашего занятия – «Энергия конденсатора». Рассмотрим плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого S, а расстояние между ними d. Пусть этот конденсатор заряжен и заряд его равен Q. Как найти электростатическую энергию, запасенную в нем?

Это можно сделать разными способами, например так. Представим себе, что мы заряжаем конденсатор, перенося заряд маленькими порциями с одной его обкладки на другую. Работа, которую мы при этом совершаем, идет на увеличение энергии конденсатора. Давайте найдем работу, необходимую, чтобы зарядить конденсатор до заряда Q, – это и будет ответом на поставленный вопрос.

Обозначим через ΔQ_i заряд i-й порции переносимого нами заряда, а через Q_i – заряд конденсатора перед переносом i-й порции. Тогда заряд ΔQ_i, перемещаясь с одной пластины на другую, проходит разность потенциалов $U_i = Q_i/C_0$ (где $C_0 = \varepsilon_0 S/d$ – емкость конденсатора), а работа, которую нужно для этого совершить, равна

$$\Delta A_i = U_i \Delta Q_i .$$

Полную работу, затраченную на перенос всего заряда Q, а значит, и энергию заряженного конденсатора, мы найдем, просуммировав все ΔA_i:

$$W_0 = A = \sum_i U_i \Delta Q_i .$$

Для того чтобы вычислить эту сумму, нарисуем график зависимости U_i от Q_i. Она очень простая – это прямая

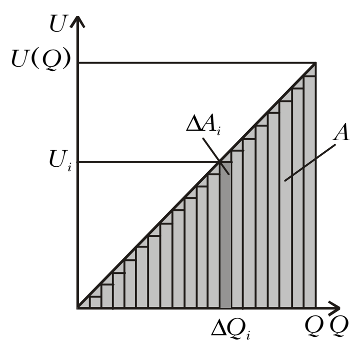

Рис.1. График, использованный Учителем для вычисления энергии заряженного конденсатора

пропорциональность (рис.1). Сразу заметим, что каждая элементарная работа ΔA_i численно равна площади прямоугольника, построенного на отрезке ΔQ_i и упирающегося в наш график. Понятно, что сумма площадей всех этих прямоугольников будет близка к площади под графиком функции $U(Q)$ (все ΔQ_i – очень маленькие). В пределе при $\Delta Q_i \to 0$ мы и получим эту площадь под графиком. Надеюсь, вычисление площади треугольника ни у кого проблем не вызывает? Тогда напишем ответ:

$$W_0 = \frac{1}{2} U(Q) Q = \frac{Q^2}{2C_0} .$$

Володя. Где-то подобное рассуждение уже возникало.

Учитель. Ну конечно, при вычислении перемещения при равноускоренном движении.

Антон. Вообще-то, можно было не возиться с этими детскими прямоугольничками и площадями под графиком. По сути, мы просто вычислили интеграл от линейной функции.

Учитель. Что ж, не в меру образованные люди могут сказать и так – это будет чистая правда.

Володя. Интересно, а если между обкладками конденсатора находится диэлектрик – результат будет таким же?

Учитель. А в чем, собственно, разница? В нашем вычислении энергии мы вообще нигде не использовали тот факт, что конденсатор – воздушный. Нам нужна была только его емкость C_0 – она определяла связь между U_i и Q_i. Если диэлектрическая пластина заполняет все пространство между обкладками и ее диэлектрическая проницаемость равна ε, то емкость конденсатора будет в ε раз больше: $C = \varepsilon C_0$. Эта емкость и войдет вместо C_0 во все формулы, в том числе и в конечный результат:

$$W = \frac{Q^2}{2\varepsilon C_0} . \qquad (1)$$

Володя. Сейчас... Я вижу по крайней мере еще один способ найти эту энергию. Может быть, он даст тот же ответ, а может и нет. Смотрите. Что происходит с диэлектрической пластиной (рис.2), вставленной в наш конденсатор? Она поляризуется – на ее поверхностях возникают связанные заряды Q_s и $-Q_s$. Величину Q_s мы можем найти, если вспомним, что полное электрическое поле внутри пластины, создаваемое зарядами обкладок и поляризационными зарядами, должно быть в ε раз меньше, чем поле обкладок:

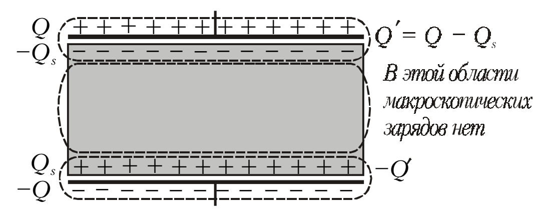

Рис.2. Таким Володя увидел заряженный конденсатор с диэлектриком

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} - \frac{Q_s}{\varepsilon_0 S} \qquad (2)$$

(поле между двумя плоскостями с зарядами Q и $-Q$ равно $Q/(\varepsilon_0 S)$). Отсюда находим

$$Q_s = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q . \qquad (3)$$

Теперь заметим, что связанные заряды расположены вплотную к обкладкам