Физика 9—11

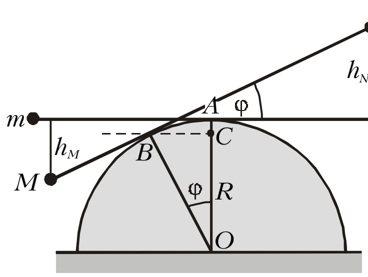
Публикуемая ниже заметка «Такие простые качели» предназначена девятиклассникам, заметка «Горки, электрические токи и Кулон» — десятиклассникам, «Физическая оптика и два верблюда» – одиннадцатиклассникам.

Такие простые качели

П.ХАДЖИ, Л.ГЛАЗОВА, В.ЛИЧМАН

ТО ЖЕ НЕ ЗНАЕТ С ДЕТСТВА качелей?! Самое простое – качаться, ухватившись за веревку (в физике это называется: грузик массой m на невесомой нерастяжимой нити длиной l совершает колебания). Но одному скучно. А вот если у вас есть друг, легкая доска и бревно…

Рассмотрим такую модель качелей. Пусть жесткий невесомый стержень (легкая доска) длиной $2L$ расположен на полуцилиндре (бревне) с радиусом R перпендикулярно его образующей. К обоим концам стрежня прикреплены точечные грузики массой m каждый (изобретательные, но очень маленькие мальчики). Стержень с грузиками может совершать малые колебания в вертикальной плоскости, перекатываясь без проскальзывания по поверхности полуцилиндра (см. рисунок). Определим частоту этих колебаний.



В положении равновесия, когда стержень располагается горизонтально, моменты сил тяжести грузиков относительно оси вращения A уравновешены. При отклонении от положения равновесия плечо силы тяжести правого грузика относительно новой оси вращения B увеличивается, а левого – уменьшается. В результате вращающие моменты этих сил не уравновешивают друг друга, и возникает нескомпенсированный вращающий момент, закручивающий стержень по часовой стрелке. Пройдя по инерции положение равновесия, стержень начинает вращаться в обратную сторону, т.е. против часовой стрелки, перекатываясь без проскальзывания по поверхности полуцилиндра, снова возвращается в положение равновесия, затем отклоняется в другую сторону и т.д. Возникают периодические колебания стержня с грузиками, которые характеризуются конкретной частотой (периодом) колебаний. Для определения этой частоты воспользуемся законом сохранения энергии.

Отклоним стержень от положения равновесия на небольшой угол φ, перекатывая его по поверхности полуцилиндра от точки A до точки B. Перпендикуляр OB к стержню в этом случае также поворачивается относительно своего первоначального положения на угол φ. Будем говорить о малых колебаниях. Критерием малости здесь является неравенство $\varphi \ll 1$ (разумеется, если угол выражать в радианах).

Найдем потенциальную энергию грузиков относительно равновесного положения.

При показанном на рисунке отклонении стержня левый грузик опускается на высоту h_M, а правый поднимается на высоту h_N, где

$$h_M = BM\sin\varphi + AC,$$
$$h_N = BN\sin\varphi - AC.$$

Из рисунка видно, что

$$AC = R - R\cos\varphi = 2R\sin^2(\varphi/2) = R\varphi^2/2.$$

Длина участка стержня от точки B до точки N равна первоначальной длине L плюс длина дуги окружности AB, вдоль которой перекатывается стержень при колебаниях:

$$BN = L + R\varphi.$$

Соответственно,

$$BM = L - R\varphi.$$

Тогда высоты h_N и h_M можно выразить формулами

$$h_N = (L + R\varphi)\varphi - R\varphi^2/2 = (L + R\varphi/2)\varphi,$$

$$h_M = (L - R\varphi)\varphi + R\varphi^2/2 = (L - R\varphi/2)\varphi.$$

Следовательно, потенциальная энергия обоих грузиков при повороте стержня на угол φ относительно положения равновесия равна

$$E_p = mgh_N - mgh_M = mgR\varphi^2.$$

Если отклоненный от положения равновесия стержень предоставить самому себе, то благодаря возвращающему моменту сил он снова придет в положение равновесия, при этом грузики будут иметь некоторую скорость. Определим кинетическую энергию системы при прохождении ею положения равновесия.

Пусть стержень в этот момент вращается вокруг точки A с угловой скоростью Ω. Поскольку стержень относительно оси вращения располагается симметрично, линейные скорости v грузиков одинаковы и равны $v = \Omega L$, а кинетическая энергия обоих грузиков определяется выражением

$$E_k = 2\cdot\frac{1}{2}mv^2 = m\Omega^2L^2.$$

При качаниях стержня, имеющих гармонический характер, максимальная угловая скорость стержня Ω выражается формулой $\Omega = \omega\varphi$, где ω – частота колебаний стержня. Поэтому

$$E_k = m\omega^2L^2\varphi^2.$$

Полагая, что потенциальная энергия, запасенная стержнем при отклонении от положения равновесия, превращается полностью в кинетическую энергию, которую имеют грузики при прохождении ими положения равновесия (закон сохранения энергии), для частоты колебаний стержня с грузиками получаем следующее выражение:

$$\omega = \frac{\sqrt{gR}}{L}.$$