энергии пружины:

$$2Mu + Mv = Mv_0, \qquad 2\frac{Mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2},$$

откуда найдем скорость u связанных нитью тележек и скорость v правой тележки:

$$u = \frac{2v_0}{3}, \; v = -\frac{v_0}{3}.$$

Дальше крайняя левая тележка едет со скоростью u, а тележки с пружиной между ними – отдельно от нее. Скорость центра масс тележек с пружиной составляет $v_0/6$, относительно него скорости этих тележек направлены навстречу друг другу и равны по $v_0/2$. Ясно, что условие задачи будет выполнено, если удар произойдет в тот момент, когда относительные скорости связанных пружиной тележек равны $v_0/2$ и направлены друг от друга. Это произойдет ровно через половину периода колебаний (точнее – через целое число периодов плюс полпериода) тележек с пружиной:

$$\tau = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Удобно вести вычисления в системе отсчета, которая двигается вправо со скоростью $v_0/6$ (система центра масс тележек с пружиной). В этой системе свободная левая тележка едет вправо со скоростью $v_0/2$, тогда минимальная длина нити (возможны и другие решения – вместо τ нужно подставлять $nT + \tau$) составляет

$$L = \frac{1}{2}v_0\tau = \frac{\pi v_0}{2}\sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Р.Александров

Ф1662. *В вертикальном теплоизолированном сосуде под тяжелым поршнем находится порция азота. На поршне сверху лежит груда песка, система находится в равновесии, начальный объем газа V_1, начальное давление p_1. Начнем медленно, по одной песчинке, убирать песок и уменьшим давление до p_2; при этом объем газа увеличится до V_2 (конечно, можно было этот объем вычислить, но будем считать, что это уже сделали и вам сообщили результат). Теперь проведем эксперимент иначе – снимем всю порцию песка сразу. Какую кинетическую энергию имел бы в этом случае поршень в тот момент, когда объем газа составил бы V_2? Считайте газ достаточно разреженным.*

При медленном расширении газа без подвода тепла работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Тогда в первом случае работа газа равна разности его энергий в начале и в конце процесса расширения:

$$A = U_1 - U_2 = 2{,}5\left(\nu RT_1 - \nu RT_2\right) = 2{,}5\left(p_1V_1 - p_2V_2\right).$$

По условию задачи поршень массивный; следовательно, он будет двигаться медленно даже тогда, когда мы снимаем всю порцию песка сразу. Поэтому работа газа во втором случае получится такой же, как и в первом (медленное расширение газа без подвода тепла).

Во втором случае работа газа идет на увеличение потенциальной и кинетической энергии поршня. Потенциальная энергия поршня увеличилась на

$$\Delta E_p = Mg\left(H_2 - H_1\right) = \frac{Mg\left(V_2 - V_1\right)}{S} = p_2\left(V_2 - V_1\right).$$

Тогда кинетическая энергия поршня получится равной

$$\Delta E_k = A - \Delta E_p = 2{,}5\left(p_1V_1 - p_2V_2\right) - p_2\left(V_2 - V_1\right).$$

М.Учителев

Ф1663. *На закрепленную тонкостенную непроводящую сферу радиусом R нанесен распределенный равномерно по поверхности заряд Q. В стенке сделано маленькое круглое отверстие площадью S. В центре сферы вначале удерживают очень маленькое по размерам массивное тело, на которое помещен заряд q того же знака, что и заряд сферы. Тело отпускают, и оно начинает двигаться под действием только электростатических сил (сила тяжести отсутствует). Объясните, почему тело будет двигаться в сторону дырки. Найдите кинетическую энергию тела, когда оно окажется в центре дырки. Точно вычислить эту энергию трудно – постарайтесь найти не слишком грубое приближение.*

«Заполним» дырку такими же зарядами, что и на остальной части сферы, получив равномерно заряженную сферу, которая не создает поля внутри, и одновременно добавим туда же заряды противоположного знака, которые на поверхности дырки дадут в сумме нулевой заряд. Именно эти заряды противоположного знака, находящиеся на площади S, и создают поле внутри сферы, именно это поле и будет разгонять тело, несущее заряд q. Ясно теперь, что тело действительно будет двигаться в сторону дырки, а его кинетическая энергия определится разностью потенциалов между центром сферы и центром дырки. Поскольку поле равномерно заряженной сферы можно не учитывать, задача сводится к расчету разности потенциалов, создаваемой маленьким практически плоским участком площадью S, заряженным с плотностью $\sigma = Q/\left(4\pi R^2\right)$.

Вдали от «дырки» поле похоже на поле точечного заряда, вблизи – на поле заряженной плоскости. Расчет можно провести, нарисовав кривые напряженностей этих полей на одном графике и плавно перейдя от одного к другому (например, от бесконечности до точки пересечения кривых взять поле точечного заряда, а дальше до самого центра дырки – однородное поле плоскости). В этом случае разность потенциалов найти будет несложно.

Но можно сделать расчет немного проще. Найти потенциал поля дырки в центре сферы совсем просто:

$$\varphi_{\text{ц}} = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{QS}{16\pi^2\varepsilon_0 R^3}.$$

Для того чтобы найти потенциал в центре дырки, разобьем кружок на тонкие кольца и посчитаем сумму вкладов этих колец в потенциал центра (пусть радиус кольца x, его ширина dx):

$$d\varphi_{\text{д}} = \frac{\sigma\cdot 2\pi x dx}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\sigma dx}{2\varepsilon_0},$$

$$\varphi_{\text{д}} = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0} = \frac{Q\sqrt{S/\pi}}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Видно, что при малых размерах дырки $\varphi_{\text{ц}} \ll \varphi_{\text{д}}$, и кинетическая энергия тела равна

$$E_k = q\varphi_{\text{д}} = \frac{qQ\sqrt{S/\pi}}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$