импульс вагона:

$$Mu_3 = mu_1 - (-mu_2) = m\left(\sqrt{v^2 + 2gH} + \sqrt{2gH}\right).$$

Еще одно уравнение получим, используя закон сохранения энергии для упругого удара:

$$\frac{mu_1^2}{2} = \frac{mu_2^2}{2} + \frac{Mu_3^2}{2}.$$

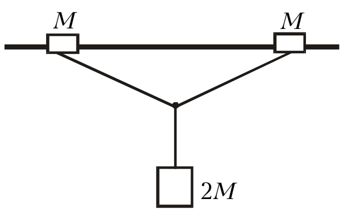
Из этих уравнений найдем минимальную скорость тележки наверху:

$$v = \frac{\sqrt{8MmgH}}{M - m}.$$

В знаменателе дроби стоит неприятное выражение $M - m$, но мы уже говорили о том, что масса налетающей тележки должна быть меньше массы стоящего вагона.

А.Зильберман

Ф1660. *На гладкий горизонтально расположенный стержень надеты две одинаковые шайбы массой M каждая, связанные легкой нерастяжимой нитью длиной 2L (см. рисунок). К середине нити привязан груз массой 2M, который вначале удерживают так, что нить не натянута, но практически не провисает. Груз отпускают, и система приходит в движение без рывка. Найдите максимальные значения скоростей шайб и груза в процессе движения. Ускорение свободного падения g.*



Легко связать скорости тел (нить нерастяжима):

$$v \sin\alpha = u\cos\alpha, \text{ или } v = u \operatorname{ctg}\alpha,$$

где v – скорость каждой шайбы, u – скорость груза, α – угол между стержнем и вертикалью. Ясно, что шайбы все время ускоряются (проекция силы натяжения нити на направление движения шайбы все время положительна), и максимальную скорость v_m шайбы будут иметь непосредственно перед ударом. Скорость груза перед ударом шайб падает до нуля; тогда из закона сохранения энергии

$$2\frac{Mv_m^2}{2} = 2M \cdot gL$$

можно получить

$$v_m = \sqrt{2gL}.$$

Определим теперь максимальную скорость груза u_m во время движения. Выразим эту скорость в виде функции угла α и найдем максимум этой функции. Согласно закону сохранения энергии,

$$2\frac{Mv^2}{2} + \frac{2M \cdot u^2}{2} = 2M \cdot gL\cos\alpha,$$

или

$$u^2 = \frac{2gL\cos\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 2gL\cos\alpha\sin^2\alpha.$$

Тут можно сразу найти максимум, например через производную, но можно это обойти при помощи простого приема – рассматривая движение шайбы в системе отсчета, связанной с грузом (в районе максимума скорости груза его ускорение практически равно нулю, и система получается «хорошей» – инерциальной). В этой системе отсчета шайба движется по окружности радиусом L со скоростью $V = u/\sin\alpha$. Ускорение шайбы направлено вдоль стержня, поэтому сумма проекций сил в перпендикулярном стержню направлении равна нулю:

$$Mg + T\cos\alpha - N = 0,$$

где T – натяжение нити, N – реакция опоры стержня. В направлении вдоль нити получим

$$T + Mg\cos\alpha - N\cos\alpha = \frac{MV^2}{L}.$$

Кроме того, при максимуме скорости груза должны быть уравновешены действующие на него силы:

$$2T\cos\alpha = 2Mg.$$

Отсюда получим

$$T\sin^2\alpha = \frac{Mu^2}{L\sin^2\alpha}.$$

Приравнивая два полученных выражения для u^2, найдем

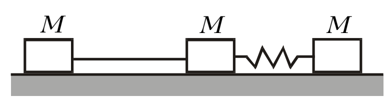
$$\sin^2\alpha = \frac{2}{3}.$$

Подставляя это значение в выражение для квадрата искомой скорости груза, получим

$$u_m = \sqrt{\frac{4gL}{3\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{gL}{3\sqrt{3}}}.$$

А.Зильберман

Ф1661. *На гладком горизонтальном столе находятся три одинаковые тележки, масса каждой тележки M (см. рисунок). Средняя тележка связана с одной из крайних легкой нитью, а с другой – легкой пружинкой жесткостью k. Вначале систему удерживают так, что пружинка не деформирована, а нить не натянута, но практически не провисает. Толчком придадим «подпружиненной» крайней тележке скорость v_0 вдоль прямой, соединяющей тележки, в направлении от средней. При какой длине нити удар тележек, которые были связаны этой нитью, получится громче всего? Тележки все время двигаются вдоль прямой, пружинка при деформациях подчиняется закону Гука.*



До некоторого момента нить остается натянутой, и связанные ею тележки едут вместе. После того как скорость этой пары достигнет максимума, нить перестанет быть натянутой и не будет действовать на тележки. В этом случае крайняя левая тележка продолжит движение с постоянной скоростью и до самого удара будет двигаться равномерно. «Самый громкий» удар получится в том случае, когда относительная скорость тележек непосредственно перед ударом будет самой большой. Скорость одной из тележек постоянна; значит, максимальная относительная скорость получается в те моменты, когда вторая тележка имеет максимальную скорость навстречу первой.

Вначале проведем расчет первого этапа – найдем максимальную скорость тележек при натянутой нити. Скорость максимальна (или минимальна) в те моменты, когда пружина не деформирована. Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии всей системы без учета