Задачи
по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 — 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1666» или «Ф1673». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1670—М1672 предлагались на XXXIX Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1673 —Ф1682 (кроме Ф1674) предлагались на первом (заочном) туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1666 — М1675, Ф1673 — Ф1682

М1666. Три плоскости разрезали куб с ребром 1 на 8 параллелепипедов. Докажите, что среди них найдутся 4 параллелепипеда, объем каждого из которых не превосходит $1/8$.

Д.Кузнецов

М1667. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части. Докажите, что в каждой части можно взять по 100 чисел с равными суммами.

В.Произволов

М1668. Имеется n бочек, содержащих 1, 2, ..., n литров воды соответственно. Разрешается доливать в бочку столько воды, сколько в ней уже есть, из любой другой бочки, в которой воды достаточно для такой операции. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одной бочке, если а) $n = 10$; б) n – любое число?

Р.Женодаров, Г.Челноков

М1669. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите равенства

$$\text{НОК}(a,\ b) = \text{НОК}(b,\ c) = \text{НОК}(c,\ a)$$

(НОК – наименьшее общее кратное).

В.Произволов

М1670. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, а стороны AB и CD не параллельны. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей внутри $ABCD$. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников ABP и CDP равны.

(Люксембург)

М1671. На соревновании выступили a участников, их оценивали b судей, где b – нечетное число, не меньшее 3. За выступление участника каждый судья ставил оценку «плюс» или «минус». Число k таково, что для любых двух судей имеется не более k участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$.

(Индия)

М1672. Пусть $d(n)$ – количество всевозможных натуральных делителей числа n, включая 1 и само n. Найдите все натуральные числа k такие, что $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ при каком-либо n.

(Белоруссия)

М1673*. Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами и из нее опущены перпендикуляры на его стороны (рис.1). Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников – красные и синие через один. Докажите, что сумма радиусов окружностей, впи-

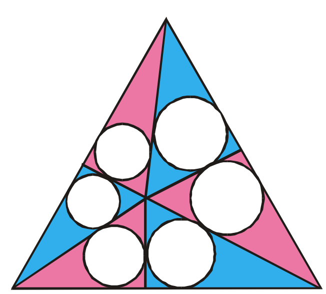

Рис.1