ное отображение отрезка на квадрат. Но взаимно однозначного и *непрерывного* отображения отрезка на квадрат построить невозможно. Это доказывается в *теории размерности* – разделе топологии, который появился на свет во втором десятилетии нашего века. В его создании принимали участие Пуанкаре (поставивший задачу и наметивший путь ее решения), крупнейший голландский математик нашего века Брауэр, великий французский математик Лебег, австрийский математик Менгер и выдающийся представитель московской школы (трагически погибший в возрасте 26 лет) Урысон.[1]

Ныне слово «комбинаторная» при определении «геометрической» топологии оказалось отброшенным, и когда произносят слово «топология» без дополнительного определения, имеется в виду топология, рожденная Пуанкаре.

Судьба двух топологий оказалась различной. Общая топология служит, в основном (вспомним Якоби), прославлению человеческого разума, не участвуя непосредственно в постижении законов природы или прикладных исследованиях.

Долгое время и геометрическая топология воспринималась как наука «далекая от жизни», призванная лишь прославлять человеческий разум, но в наше время выяснилось, что она имеет самое непосредственное отношение к объяснению устройства мироздания. Помимо этого, топологические методы ныне пронизывают фактически все разделы математики – анализ, теорию дифференциальных уравнений и т.п. Сейчас топология – одна из центральных областей математики.

Теория функций

В начале века Лебег завершил построение теории меры и интегрирования. В XIX веке вослед за Коши и Риманом интеграл $\int_a^b f(x)dx$ понимали как предел римановых сумм: за приближенное значение интеграла брались выражения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ – разбиение отрезка, а ξ_i – некоторая точка отрезка $[x_i, x_{i-1}]$.

Лебег же стал поступать по-другому. Он разбивал не ось абсцисс, а ось ординат точками … $y_{i-1} < y_i < \ldots$, мотивируя это тем, что для разрывной функции невозможно выбрать точку ξ_i, которая адекватно «представляла» бы функцию f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Но множества E_i на оси абсцисс, для которых $y_{i-1} \le f(x) < y_i$, у достаточно сложных функций могут быть устроены весьма причудливо, и для построения теории интегрирования необходимо было в первую очередь построить *теорию меры*, т.е. научиться измерять такие множества. Это было сделано Борелем и Лебегом.

Меру множества E (скажем, на отрезке [0, 1]) Лебег определял следующим образом. Нижнюю грань сумм длин интервалов, покрывающих E, назовем *верхней мерой* E. Верхняя мера определена для любого множества. Множество E называется *измеримым по Лебегу*, если сумма верхней меры этого множества и верхней меры его дополнения (по отношению к отрезку [0, 1]) равна единице. Тогда верхнюю меру E называют *мерой Лебега* множества E и обозначают mes(E).

Римановы суммы для вычисления интеграла Лебег заменил суммами вида $\sum_i \eta_i \operatorname{mes}(E_i)$, где η_i – некоторая точка отрезка $[y_{i-1}, y_i]$. Он весьма выразительно описал преимущество своего метода. «В методе Коши, – писал Лебег, – оперируют так, как делает это неопытный клерк, который подсчитывает монеты и кредитные билеты сообразно тому, как они попадаются под руку. Тогда как мы оперируем, как опытный и методичный клерк, говорящий: у меня $\operatorname{mes}E_1$ монет по одному франку, стоящих $1 \times \operatorname{mes}E_1$, у меня $\operatorname{mes}E_2$ монет по два франка, стоящих $2 \times \operatorname{mes}E_2$, у меня $\operatorname{mes}E_5$ монет по пять франков, стоящих $5 \times \operatorname{mes}E_5$, … Итого, у меня $1 \times \operatorname{mes}E_1 + 2 \times \operatorname{mes}E_2 + 5 \times \operatorname{mes}E_5 + \ldots$ франков. Конечно, и тот и другой клерки придут к одному и тому же результату. Но в случае сумм неделимых, число которых бесконечно, разница двух методов капитальна.» На базе новой теории меры родилось новое направление в теории функций – *метрическая теория функций.*

Трансформировалась и теория множеств. У истоков нового направления стояли три французских ученых – Борель, Бэр и Лебег. Они заложили основания *дескриптивной теории множеств* – теории числовых множеств, где стали изучать строение сложных, причудливо устроенных множеств.

В двадцатые годы ведущая роль в теории функций перешла к русской школе, которую представляли Николай Николаевич Лузин и его ученики П.С.Александров, Н.К.Бари, А.Н.Колмогоров, Д.Е.Меньшов, М.Я.Суслин, А.Я.Хинчин и др. Они и заложили основания московской математической школы. Сделав первые шаги в теории функций, ученики Лузина пошли в дальнейшем каждый своим путем. Колмогоров и Хинчин преобразовали теорию вероятностей, Александров и Урысон – топологию, Люстерник и Шнирельман – нелинейный анализ, Новиков внес выдающийся вклад в математическую логику, Лаврентьев сделал крупнейшие открытия в комплексном анализе и механике. Лишь Меньшов и Бари продолжали дело своего учителя. В тридцатые годы ни одна математическая школа мира не располагала таким созвездием выдающихся ученых.

Теперь настала пора рассказать о том, какую роль сыграла математика в постижении законов природы.

Математика и физика

В конце прошлого века казалось, что физика – завершенная область знаний. По легенде, когда некий юноша[2] обратился к мэтру с просьбой о напутствии – он хотел стать физиком, – мэтр сказал, что не видит у физики перспектив: на почти безоблачном небе отрытых истин видны лишь два небольших облачка – опыт Майкельсона и законы излучения. Скоро они рассеются, и в физике нечего будет делать.

Через несколько лет из первого облачка родилась *специальная теория относительности*, а из второго – *квантовая механика*, которые перевернули все наше представление о мире.

Специальная теория относительности была создана в 1904–1906 гг. усилиями Лоренца, Эйнштейна и Пуанкаре. Устройство физического мира, описываемого этой теорией,

[1] *О теории размерности см., например, в статье «Павел Самуилович Урысон» в «Кванте» №3 за 1998 год.*

[2] *Макс Планк. (Прим. ред.)*