Решения задач М1636—М1645, Ф1653—Ф1657

М1636. *Вокруг трапеции нельзя описать окружность. Докажите, что трапеция, образованная серединными перпендикулярами к ее сторонам, подобна исходной.*

Сначала определимся с тем, что есть что (рис.1): KL, MN – средние линии трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно, R – середина KL и PQ, S – середина EF, T – середина AB.

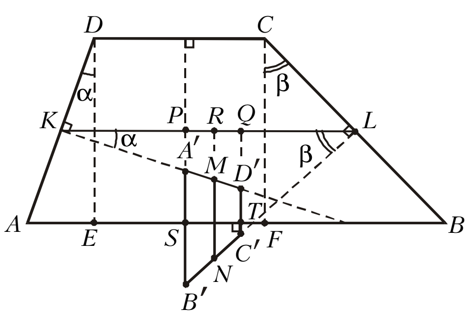

Рис.1

Соответствующие углы трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны ($\angle A' = 180^\circ - \angle D = \angle A$ и т.д.), поэтому достаточно доказать, например, что

$$\frac{(AB+CD)/2}{H} = \frac{(A'B'+C'D')/2}{h},$$

где H и h – высоты трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно.

Имеем $MN = NR - MR = RL\,\mathrm{tg}\,\beta - RK\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{AB+CD}{4}(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$, так как $KR = RL$. Теперь осталось доказать, что $2h = H(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$.

Имеем $H\,\mathrm{tg}\,\beta - H\,\mathrm{tg}\,\alpha = FB - EA = (BT - TF) - (AT - TE) = TE - TF = (ES + ST) - (SF - ST) = 2ST = 2h$; так как $ES = SF$, то $2h = H(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$.

Доказательство завершено.

В.Кириченко

М1637. *Квадрат со стороной 1 разрезали на k прямоугольников. Докажите, что сумма длин k наименьших сторон всех прямоугольников не менее 1.*

Две стороны исходного квадрата будем считать горизонтальными, а две другие – вертикальными. В соответствии с условием задачи, у каждого прямоугольника отмечена одна сторона – либо горизонтальная, либо вертикальная. Если всякая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, пересекает хотя бы одну отмеченную сторону какого-либо прямоугольника, то ясно, что сумма длин отмеченных сторон не меньше длин сторон квадрата, т.е. не меньше 1.

Если же найдется горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, но не пересекающая ни одну из отмеченных сторон, то у всех прямоугольников, которые она пересекает, отмеченными окажутся горизонтальные стороны. Ввиду этого, всякая вертикальная прямая, пересекающая квадрат, пересекает хотя бы одну из отмеченных сторон, т.е. сумма их длин не меньше 1.

В.Произволов

М1638. *Красный квадрат площадью 1 покрывают более 100 белых квадратов, площадь каждого из которых равна 1. При этом стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один белый квадрат так, что остальные все еще будут покрывать целиком красный квадрат?*

Покажем, что не всегда. Для этого построим специальное покрытие красного квадрата N белыми квадратами ($N > 100$). Диагональ AC красного квадрата $ABCD$ разобьем на N равных отрезков, концы которых последовательно обозначим числами 1, 2, …, $N + 1$ (точка A обозначена числом 1, а точка C – числом $N + 1$). Заметим, что для каждой пары точек K и $K + 1$ ($(1 \le K \le N)$) существуют ровно два квадрата заданного размера, стороны которых параллельны сторонам красного квадрата и проходят через точки K и $K + 1$, причем один из этих квадратов содержит вершину B и не содержит D, а другой, наоборот, содержит D и не содержит B. Если K нечетно, то в качестве белого возьмем тот квадрат, который содержит вершину B, а если K четно, то тот квадрат, который содержит D. Выбранные таким образом N белых квадратов покрывают целиком красный квадрат, но если удалить любой из них, то часть красного квадрата окажется непокрытой. В самом деле, если удалить белый квадрат, стороны которого проходят через точки K и $K + 1$, то отрезок диагонали с концами K и $K + 1$ покрыт не будет.

С.Агеев, В.Произволов

М1639. *Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда* *лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю m всех жителей составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.*

Пусть x – доля правдивых жителей. Рассмотрим другой круг, в котором все лжецы станут правдивыми, а все правдивые – лжецами; в нем доля правдивых равна $1-x$. В этом круге путешественник услышит в точности то же, что и в первом круге, поскольку правдивость каждого жителя изменилась, но изменилась и правдивость соседа, о котором он говорит. Поскольку путешественник сумел на основании полученных ответов определить долю правдивых жителей, эта доля в обоих случаях одинакова. Следовательно, она равна $1/2$.
Побочное следствие: число жителей было четным.

Б.Френкин

М1640. *Четырехугольник ABCD обладает тем свойством, что внутри него существует точка M, для которой AMB и CMD – равнобедренные треугольники с углом 120° при вершине M. Докажите, что тогда существует точка N, для которой BNC и DNA – равносторонние треугольники.*

Треугольники AMC и BMD равны по двум сторонам и углу между ними (рис.1). Значит, диагонали AC и BD равны и угол между ними 60°.

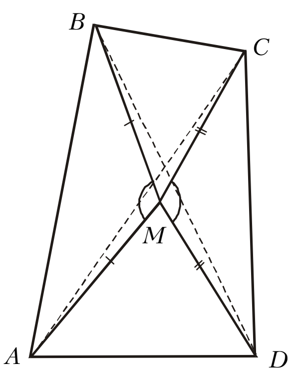

Рис.1

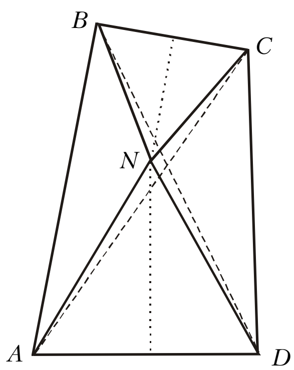

Рис.2

Теперь проведем серединные перпендикуляры к сторонам AD и BC, точка их пересечения и будет искомой точкой N (рис.2). В самом деле, треугольники ANC и DNB равны (по трем сторонам) и получаются один из другого поворотом на 60° около точки N. Значит, $\angle BNC = \angle AND = 60°$ и равнобедренные треугольники AND и BNC – равносторонние.

И.Шарыгин

М1642.[1] *Некоторые стороны клеток шахматной доски 8×8 являются перегородками. Расстановка перегородок называется хорошей, если доска остается связной (ладья может пройти с любого поля на любое другое, минуя перегородки), и плохой – в противном случае. Каких расстановок больше – хороших или плохих?*

Всего мест для потенциальных перегородок 112. На любом из них может быть поставлена или не поставлена перегородка, так что расстановок – хороших и плохих – всего 2^{112}. Поставим две перегородки, ограничивающие угловое поле a1. Расстановок с этими перегородками 2^{110} – четверть от общего количества. Среди оставшихся трех четвертей всех расстановок четверть составляют те, у которых отрезано угловое поле h1. Плохие расстановки этих двух типов составляют в сумме $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{16}$ от общего числа. Четверть оставшихся расстановок составляют те, у которых отрезано поле a8, и плохих расстановок уже больше половины:

$$\frac{7}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}=\frac{37}{64}>\frac{1}{2}.$$

А.Шаповалов

М1643. *а) Существуют ли целые числа a и b (a ≠ 0) такие, что последовательность $c_n = an! + b$ состоит только из квадратов?*
б) Существуют ли целые числа a, b, c (ab ≠ 0) такие, что для каждого n существует целое x, для которого $ax^2 + bx + c = n!$?

а) Нет, не существуют.
Предположим, что числа a и b существуют. Докажем, что $b \neq 0$.
В самом деле, если $b = 0$, то для *любого* простого p существуют такие натуральные x и y, что

$$a\cdot(p-1)! = x^2,$$

$$a\cdot p! = y^2.$$

Но тогда

$$px^2 - y^2 = 0,$$

откуда следует, что y делится на p, при этом и x делится на p, т.е. a делится на p. Итак, a должно делиться на все без исключения простые числа, что невозможно.
Если $b \neq 0$, то при любом натуральном n существуют натуральные x и y, для которых

$$a\cdot\left(n^2-1\right)! = x^2 - b,$$

$$a\cdot\left(n^2\right)! = y^2 - b.$$

Умножая первое равенство на n^2 и вычитая из него второе равенство, получаем

$$n^2x^2 - y^2 = \left(n^2-1\right)b.$$

Тогда

$$\left(n^2-1\right)|b| = |nx-y|\cdot|nx+y| \geq y,$$

но

$$y = a\cdot\left(n^2\right)! + b \geq an^2\left(n^2-1\right)+b,$$

откуда

$$\left(n^2-1\right)|b| \geq an^2\left(n^2-1\right)+b.$$

Последнее неравенство не выполняется при больших n, поскольку слева многочлен второй степени, а справа – четвертой.
б) Не существуют. Иначе дискриминант квадратного уравнения при всяком n являлся бы полным квадратом вопреки а).

А.Егоров

[1] *Решение задачи М1641 будет опубликовано в одном из следующих номеров журнала.*

М1644. *Двое показывают следующий фокус. Один из перетасованной колоды, содержащей 52 карты, вытаскивает 5 произвольных карт и выкладывает четыре из них в ряд картинкой вверх, а пятую*
а) также выкладывает в ряд среди остальных четырех, но картинкой вниз;
б) берет себе.*
Второй, глядя на лежащие перед ним карты, называет пятую карту. Как он это делает?

а) Первый фокусник может выбрать из пяти карт две карты одной масти. Одну из них он положит картинкой вниз (на какое именно место в ряду карт, будет уточнено позднее), а вторую он положит с левого края картинкой вверх. По левой карте второй фокусник узнает масть закрытой карты. Всего карт одной масти 13, одна из них открыта, так что остается выбрать одну из 12 оставшихся. Следующие три карты, которые открыты, можно упорядочить шестью способами (поскольку любые три предмета можно упорядочить всего тремя способами). После того, как 4 открытые карты выложены, закрытую карту можно расположить (между ними или с краю) пятью способами. Всего вариантов оказывается $6 \times 5 = 30$ – этого достаточно, чтобы закодировать 12 карт.
б) Если действовать по той же схеме, то информации не хватает, так как для выделения одной карты из 12 имеется лишь 6 вариантов расположения трех открытых карт. Но не нужно торопиться с выводом, что у задачи отрицательный ответ. Как и в задаче а), первый фокусник выбирает масть, которая представлена хотя бы двумя картами, выбирает эти две карты. Дальше он действует иначе. 13 карт выбранной масти можно расположить по кругу в установленном порядке (например, в порядке роста старшинства). На круге установим направление. От каждой карты проведем стрелки к шести картам, которые в этом круге идут следом за ней. Тогда любые две карты окажутся соединенными, и притом только одной стрелкой. Фокусник по-прежнему выбирает две карты одной масти, но картинкой вверх кладет ту из них, из которой идет стрелка к второй карте. Таким образом, второму фокуснику придется выбирать уже не из 12, а только из 6 карт, что, как мы видели, возможно.

Г.Гальперин

М1645. *Докажите, что число способов, которыми можно расставить n чисел 1, 2, ..., n ($n \geq 10$) в последовательность без убывающих подпоследовательностей длиной 10, не превосходит 81^n.*

Будем называть расстановку чисел хорошей, если она удовлетворяет условиям задачи. Сначала докажем, что если расстановка хорошая, то числа в ряду можно раскрасить в девять цветов так, чтобы числа каждого цвета шли в порядке возрастания. Действительно, будем красить числа слева направо, используя каждый раз цвет с наименьшим номером такой, что последнее покрашенное в этот цвет число меньше текущего. Предположим, что девяти цветов не хватило. Мы не можем покрасить очередное число в девятый цвет, так как в девятый цвет уже было покрашено большее число. Оно не было покрашено в восьмой цвет, поскольку до него встретилось большее число, покрашенное в восьмой цвет... и так далее. Получаются 10 чисел, которые идут в порядке убывания, чего не может быть.

Расстановка чисел от 1 до n вместе с раскраской в девять цветов такой, что последовательность чисел каждого цвета возрастает, полностью определяется цветом каждого числа от 1 до n и цветом каждого места в ряду. Числа от 1 до n можно раскрасить в девять цветов 9^n способами. И столькими же способами можно раскрасить в девять цветов n мест, на которые эти числа будут расставлены. Таким образом, число хороших расстановок не превосходит 81^n.
Замечание. Метод раскраски, который мы применили, позволяет доказать, что при любой расстановке в ряд первых $mn + 1$ натуральных чисел найдется монотонно возрастающая подпоследовательность из $n + 1$ чисел или убывающая подпоследовательность из $m + 1$ чисел.

А.Канель

Ф1653. *С балкона бросают камешки через равные интервалы времени и без начальной скорости. К моменту, когда первый камешек упал на землю, следующий пролетел ровно половину пути. Какую часть пути пролетел к этому моменту третий камешек? Сколько камешков было в полете непосредственно перед ударом первого камешка о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным точно 10 м/с^2.*

Обозначим высоту балкона через H. Тогда время полета первого камешка будет $T = \sqrt{2H/g}$. Второй камешек летел в течение времени $T - \tau = \sqrt{H/g}$, откуда найдем интервал между бросаниями:

$$\tau = T\left(1 - 1/\sqrt{2}\right) \approx 0{,}293\ T.$$

Это немного меньше трети времени падения T; отсюда сразу следует, что к моменту падения первого камешка на землю в воздухе, кроме него, будет еще три камня (четыре – включая первый).
Третий камешек к моменту падения первого находился в воздухе в течение времени $T - 2\tau$, за это время он пролетел расстояние

$$h = H(T - 2\tau)^2 / T^2 \approx 0{,}17\ T.$$

З.Рафаилов

Ф1654. *Предлагается следующий проект движущегося тротуара: человек ступает с земли на первую движущуюся дорожку, через некоторое время переходит на следующую, у которой скорость больше, и так далее. Пусть первая дорожка едет с постоянной скоростью $v_1 = 2$ м/с, человек с неподвижной земли ступает на нее перпендикулярно вектору скорости и, перестав скользить, переходит дальше – опять перпендикулярно вектору скорости. Ожидаемая нагрузка на такую дорожку (число людей, ступающих на нее с земли) составляет $N = 10$ человек в секунду, масса человека в проекте принимается равной $M = 80$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть дорожку в горизонтальном направлении, чтобы ее скорость оставалась постоянной? С какой силой нужно действовать на вторую дорожку, если она движется со скоростью $v_2 = 3$ м/с? Считайте, что в среднем число людей на каждой из дорожек одинаково.*

При разгоне человека, ступившего на первую дорожку с земли, его импульс меняется от нуля до величины Mv_1, переходящий же на следующую дорожку не отнимает импульс у дорожки (он «уходит» перпендикулярно), поэтому искомую силу можно выразить через приращение импульса системы за одну секунду:

$$F_1 = NMv_1 = 1600 \text{ Н}.$$

Аналогично, для второй дорожки важно приращение скорости человека, приходящего с первой дорожки, – эта величина в два раза меньше предыдущей (от 2 до 3 м/с), тогда

$$F_2 = NM(v_2 - v_1) = 800 \text{ Н}.$$

Р.Простов

Ф1655. *Моль гелия в процессе расширения получает тепло, его теплоемкость при этом составляет $C = 15$ Дж/(моль·К). Найдите изменение температуры газа в этом процессе при совершении им работы $A = 20$ Дж.*

Запишем уравнение первого начала термодинамики для данного процесса:

$$Q = A + \Delta U, \text{ или } C\Delta T = A + C_V \Delta T.$$

Отсюда находим

$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} = \frac{A}{C - 1{,}5R} \approx 8 \text{ К}.$$

Итак, температура моля гелия в процессе расширения возрастает на 8 К.

М.Учителев

Ф1656. *В вершинах правильного треугольника со стороной d находятся три маленьких заряженных тела. Одно из них закреплено, два других – масса каждого из них M, заряд Q – свободны. Какой заряд нужно поместить на закрепленное тело, чтобы при отпускании двух других их ускорения оказались минимальными? Чему будет равна величина этого ускорения?*

Между подвижными зарядами действует кулоновская сила отталкивания, равная $F = kQ^2/d^2$. Ясно, что третий заряд следует выбрать противоположного знака, тогда на каждый из подвижных зарядов будет действовать дополнительная сила притяжения к неподвижному заряду, равная $f = kqQ/d^2$. Для получения минимального ускорения нужна минимальная суммарная сила. Проще всего разложить силу $\vec{F}$ на направление вдоль силы $\vec{f}$ и перпендикулярно этому направлению и записать квадрат модуля полной силы в виде $(f - F\cos 60°)^2 + (F \sin 60°)^2$. Минимальное значение суммарной силы получим, выбирая оптимальное значение силы f, – ясно, что оно должно обратить в ноль первое слагаемое. Итак,

$$f = F\cos 60° = 0{,}5F.$$

Отсюда получаем, что заряд закрепленного тела должен быть вдвое меньше Q по модулю и иметь противоположный знак:

$$q = -Q/2.$$

В этом случае ускорение каждого подвижного тела в первый момент определяется составляющей силы $\vec{F}$ на направление, перпендикулярное силе $\vec{f}$:

$$a = \frac{F\cos 30°}{M} = \frac{kQ^2\sqrt{3}}{2Md^2}.$$

А.Зильберман

Ф1657. *Два одинаковых громкоговорителя подключены параллельно к выходу генератора звуковых колебаний, а очень маленький микрофон расположен в отдалении. При неизменной температуре воздуха $T = 300$ К мы проводим эксперимент – изменяем частоту генератора и наблюдаем за показаниями чувствительного вольтметра, который измеряет выходной сигнал микрофона. При частоте $f_1 = 2400$ Гц получается максимум выходного сигнала микрофона, на частоте $f_2 = 2600$ Гц – минимум, а между этими частотами уровень сигнала от микрофона монотонно убывает. Что будет наблюдаться на частоте $f_3 = 400$ Гц? При какой температуре воздуха получился бы максимум на частоте f_2? Отражения звуковых волн от стен, пола и потолка не происходит.*

Будем считать, что разность расстояний от громкоговорителей до микрофона равна d, а громкоговорители подключены так, что излучают в фазе (при «переподключении» одного из них излучаемые волны были бы противофазны). Запишем условие максимума на частоте f_1:

$$d = n\lambda_1 = \frac{nc}{f_1},$$

где c – скорость звука при температуре 300 К, n – любое целое число. Из условия задачи следует, что на частоте f_2 выполняется соотношение

$$d = (n + 0{,}5)\lambda_2 = (n + 0{,}5)\frac{c}{f_2}.$$

Из записанных уравнений можно определить число n:

$$\frac{n + 0{,}5}{n} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2600}{2400}, \text{ и } n = 6.$$

Итак, разность хода равна длине волны, которая соответствует частоте $f_1/4 = 400$ Гц. Ясно, что на этой частоте получится максимум.

Теперь об опытах при измененной температуре. Скорость звука при изменении температуры газа меняется таким же образом, как и скорости молекул (например – как среднее квадратичное значение скоростей), т.е. пропорционально корню квадратному из температуры. Запишем условие получения максимума на частоте f_2:

$$d = m\lambda = \frac{mc_1}{f_2},$$

или

$$\frac{mc_1}{f_2} = \frac{nc}{f_1}.$$

Ближайшая температура T_1, соответствующая скорости c_1, должна получиться при $m = 6$:

$$\sqrt{\frac{T}{T_1}} = \frac{c}{c_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{13}{12},$$

и

$$T_1 = T\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = 300\,\frac{169}{144} \text{ К} \approx 352 \text{ К}.$$

Подстановка значения $m = 7$ дает температуру $T_2 = 278$ К. Формально можно подставлять и другие целочисленные значения m, но соответствующие им температуры совсем уж не способствуют проведению физических экспериментов.

Р.Александров