
49
39
27
19
13
7
3
1

Ум хорошо, а пять — лучше

И.АКУЛИЧ

Говорят, математика наиболее быстро развивается в периоды кризиса экономики, потому что для нее не требуется дорогостоящее оборудование, а лишь карандаш, бумага, да голова на плечах – и все. Так-то оно так, но, право, ничуть не повредит наличие за столом какого-нибудь компьютера, лучше всего – с микропроцессором «Пентиум». Ведь что такое «Пентиум»? В переводе с латыни (или, возможно, с греческого) «пенти» – это, несомненно, пять, а «ум» – он и есть ум. Таким образом, «Пентиум» означает ни много ни мало *пять умов*, и имея его в своем распоряжении, мы сразу как бы становимся во главе целого ученого совета, который способен на великие дела под нашим чутким руководством!

Шутки шутками, но компьютер может многое, и, видимо, зря некоторые математики относятся к нему с некоторым пренебрежением. Каспаров тоже, помнится... Но не будем о грустном. В этой статье вниманию читателя предлагаются три задачи, которые не то что решить, но даже толком сформулировать без компьютера было бы вряд ли возможно. Надеемся, приведенные примеры подвигнут тех, кто еще сомневается, на стремление овладеть компьютером и в дальнейшем использовать его для борьбы с самыми разными проблемами.

Прародителем первой задачи стал кандидат физико-математических наук И.Воронович – автор многих задач Белорусских математических олимпиад. Как-то он предложил всеобщему вниманию две возрастающие непересекающиеся последовательности натуральных чисел a_n и b_n, определяются которые предельно просто: они покрывают все множество натуральных чисел и удовлетворяют условию $a_n = b_n + n$. Доказать, что...

Впрочем, доказывать ничего не требовалось. Для начала следовало хотя бы понять, как эти последовательности себя ведут, и что из этого может следовать. Здесь-то и выяснилось, что несмотря на простоту и лаконичность определения, «сладкая парочка» обладает весьма капризным нравом. Во-первых, далеко не очевидно, что такие две последовательности вообще существуют. К счастью, в этом нетрудно убедиться, для чего достаточно показать, как их «строить». Поскольку все $a_n > b_n$ (и чем дальше, тем значительней), то наименьшее натуральное число, т.е. 1, – это, конечно, b_1. Следовательно, $a_1 = b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$. Таким образом, два наименьших натуральных числа использованы. А дальше? Наименьшее свободное пока что число – 3, поэтому $b_2 = 3$; тогда $a_3 = b_3 + 2 = 3 + 2 = 5$. Затем получаем: $b_3 = 4$, $a_3 = b_3 + 3 = 7$, $b_4 = 6$, $a_4 = b_4 + 4 = 10$ и так далее. Как видно, надо каждый раз просто-напросто выбирать наименьшее неиспользованное натуральное число и считать его равным b_n, а затем находить a_n по формуле $a_n = b_n + n$. Но не получится ли так, что очередное вычисленное значение a_n окажется уже занято каким-нибудь другим ранее определенным a_m или b_m, где $m < n$? Нет, не получится! Из самого способа построения последовательностей очевидно, что обе они – строго возрастающие. Поэтому не может быть и речи о равенстве $a_n = a_m$ и уж тем более – о равенстве $a_n = b_m$, поскольку $b_m < a_m$.

Назовем натуральные числа, принадлежащие последовательности a_n, А-числами, а принадлежащие последовательности b_n – В-числами. Поскольку «расстояние» между a_n и b_n с ростом n неограниченно возрастает, то следовало ожидать, что чем дальше идти по натуральному ряду, тем реже будут встречаться А-числа. Чтобы в этом убедиться, был использован наш верный друг компьютер, и оказалось, что ничего подобного не наблюдается! Вот как выглядит начало натурального ряда после замены каждого числа соответствующей буквой А или В:

BABBABABBABBABABBABAB
BABBABABBABBABABBABAB
BABBABAB...

И в том же духе продолжается на протяжении сотен тысяч знаков! Так компьютер отверг первую гипотезу.

Узрев, что частота появления А-чисел вовсе не собирается убывать, пришлось повнимательней рассмотреть, как чередуются А- и В-числа. Оказалось, что между каждыми соседними А-числами всегда располагается одно или два В-числа (чаще два, чем одно). Это подтолкнуло И.Вороновича на гипотезу о периодичности их чередования, возможно, с очень длинным периодом. Он проделал колоссальный объем работы, и неоднократно казалось, что период наконец-то пойман, но... успех так и не пришел.

Впрочем, отрицательный результат – тоже результат, и он убеждает в том, что периода, скорее всего, нет. Между тем, некая «регулярность», безусловно, имеет место. В связи с этим автор настоящей статьи сделал попытку определить хотя бы, к какому пределу стремится отношение количества В-чисел к количеству А-чисел. Так как каждая пара А-чисел, судя по всему, разделена одним или двумя В-числами, то предел (если он, конечно, существует) должен лежать где-то между 1 и 2 (и, пожалуй, ближе к 2). А точнее? И на помощь опять пришел компьютер. Первые несколько миллионов натуральных чисел были распределены между нашими последовательностями, а затем найдено отношение между количеством В- и А-чисел. Оно оказалось равным 1,618033...

Да ведь это же... Ну, конечно! Грех не узнать знаменитое золотое сечение, т.е. $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$. А, может, оно здесь ни при чем – просто случайное совпадение? Нет уж, вряд ли: слишком маловероятно полное тождество семи десятичных знаков! Но тогда откуда оно взялось? Если вдуматься, золотое сечение (как и любая другая квадратичная иррациональность) здесь вообще никаким боком не подходит. Не верь глазам своим!

Никуда не денешься: факты – вещь упрямая. Успокоив себя цитатой из классика научно-популярной литературы М.Гарднера о том, что от золотого сечения можно всего ожидать, автор задумался, как быть дальше. Прежде всего, стало понятно,

Иллюстрация П.Чернуского

почему попытка И.Вороновича нащупать периодичность была обречена на провал – ведь чередуйся А-числа с В-числами по периодическому закону, предел был бы рациональным числом. Но кроме этого, ничего путного в голову не лезло, зато только что использованная компьютерная программа маячила, так сказать, перед самым носом. От безысходности было решено слегка ее модернизировать, чтобы проверить, как поведут себя последовательности a_n и b_n, если связать их более общим соотношением: $a_n = b_n + kn$, где k – некоторое натуральное число (в исходном варианте было, очевидно, $k = 1$).

Сначала соотношение между количеством В- и А-чисел было найдено для $k = 2$. Оно оказалось равным 2,1414213… Дробная часть этого числа поразительно напоминает десятичное разложение $\sqrt{2}$. Правда, целая на 1 больше, чем надо. Но тогда выходит, что предел отношения для $k = 2$ равен $1 + \sqrt{2}$. Результат налицо – хотя совершенно непонятный.

Дальше все пошло гораздо хуже. Возникающие отношения были совсем ни на что не похожи: $k = 3$ получилось 3,302775…, для $k = 4$ – 4,236067…, для $k = 5$ – 5,192582… и так далее. Тупик!

И здесь автору невероятно, просто фантастически повезло. По счастливому стечению обстоятельств он незадолго до этого готовил к печати статью о цепных дробях и в процессе подготовки исключительно для собственного удовольствия вычислил значения простейших цепных дробей, которые чудом удержались в памяти. В частности, еще не забылось, что

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

а также:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}=1+\sqrt{2}.$$

Естественным образом родилась совершенно бредовая идея (вполне под стать самим последовательностям): если $a_n = b_n + kn$, то предел отношения количества В-чисел к количеству А-чисел равен следующей цепной дроби:

$$k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\ldots}}}}.$$

Для удобства следует привести ее к более компактному виду. Это нетрудно. Пусть данное выражение равно z. Тогда под самой верхней дробной чертой расположено то же самое число z, что дает нам уравнение:

$$k+\frac{1}{z}=z,$$

откуда $z=\left(k+\sqrt{k^2+4}\right)/2$. Для $k = 1$ и 2 получаем уже знакомые нам золотое сечение и $1 + \sqrt{2}$. А для других k? Если $k = 3$, то $x = \left(3+\sqrt{13}\right)/2$ = 3,302775… – полное совпадение с компьютерным результатом! То же самое имеет место и для $k = 4$, и для $k = 5$, и (здесь «Пентиум» разошелся не на шутку) для следующих двух десятков значений k. Все сомнения отпали напрочь. Можно было давать руку (или хотя бы палец) на отсечение, что предел равен именно $z=\left(k+\sqrt{k^2+4}\right)/2$, но *как это доказать?*

Здесь решение задачи перешло в стадию, условно именуемую «глаза боятся, а руки делают». Совершенно не веря в успех, автор уныло приступил к рассуждениям. Итак, пусть $a_n = b_n + kn$, где k – заданное натуральное число. Обозначим через $p(N)$ отношение количества В-чисел, не превосходящих N, к количеству А-чисел, не превосходящих N. Обозначим также через p предел значения $p(N)$ при $N \to \infty$ и найдем это p.

Сначала были сделаны предварительные оценки разности между соседними А- и В-числами (докажите их):

$$k+1 \le a_{n+1}-a_n \le k+2,$$

$$1 \le b_{n+1}-b_n \le 2.$$

Теперь возьмем первые N чисел натурального ряда. Пусть среди них имеется n А-чисел и соответственно $(N - n)$ В-чисел. По определению $p(N) = (N - n)/n$, откуда $n = N/(p(N) + 1)$.

Затем рассмотрим натуральные числа, не превосходящие b_n. Среди них, очевидно, ровно n В-чисел, а количество А-чисел, разумеется, в $p(n)$ раз меньше, т.е. $n/p(n)$. Всего же натуральных чисел, не превосходящих b_n, будет $n + n/p(n) = n\cdot\left(p(n)+1\right)/p(n)$. Поскольку b_n – наибольшее из них, то $b_n = n\cdot\left(p(n)+1\right)/p(n)$.

Тогда следующее В-число b_{n+1} в силу предварительных оценок либо на 1, либо на 2 превышает b_n, т.е. $b_{n+1} = b_n + \Delta_b$, где $1 \le \Delta_b \le 2$. Поэтому

$$a_{n+1}=b_{n+1}+k(n+1)=$$

$$=b_n+\Delta_b+k(n+1)=$$

$$=\frac{n\cdot\left(p(n)+1\right)}{p(n)}+\Delta_b+kn+k.$$

Среди первых N натуральных чисел имеется n А-чисел. Это означает, что $a_n \le N$, но $a_{n+1} > N$, т.е. $a_{n+1} = N + \Delta_a$, где $\Delta_a \ge 1$. Оценим Δ_a сверху:

$$\Delta_a = a_{n+1}-N \le a_{n+1}-a_n \le k+2$$

(в силу предварительных оценок). Итак, $1 \le \Delta_a \le k+2$.

А теперь приравняем правые части двух полученных различных выражений для a_{n+1}:

$$\frac{n\cdot\left(p(n)+1\right)}{p(n)}+\Delta_b+kn+k=N+\Delta_a.$$

Вспомним, что $n = N/\left(p(N)+1\right)$ и подставим это значение в последнее выражение:

$$\frac{N}{p(N)+1}\cdot\frac{p(n)+1}{p(n)}+\Delta_b+$$

$$+k\cdot\frac{N}{p(N)+1}+k=N+\Delta_a.$$

Отсюда после простых преобразований получаем *главное уравнение*:

$$\frac{1}{p(N)+1}\cdot\left(\frac{p(n)+1}{p(n)}+k\right)=$$

$$=1+\frac{\Delta_a-\Delta_b-k}{N}.$$

Так как ограничения сверху и снизу для Δ_a и Δ_b уже известны, то легко получить и ограничения для выражения $\Delta_a - \Delta_b - k$:

$$-1-k \le \Delta_a-\Delta_b-k \le 1$$

(подробности опущены, так как слишком просты).

Наконец, устремим N к бесконечности и рассмотрим, что произойдет с главным уравнением. Очевидно, если $N \to \infty$, то и $n \to \infty$, поэтому и $p(N)$, и $p(n)$ устремятся к p. Кроме того, выражение $\Delta_a - \Delta_b - k$ ограничено сверху и снизу некоторыми фиксированными числами, поэтому предел отношения $\left(\Delta_a - \Delta_b - k\right)/N$ устремится к нулю. Следовательно, предельный вид главного уравнения таков:

$$\frac{1}{p+1}\cdot\left(\frac{p+1}{p}+k\right)=1+0\,.$$

После раскрытия скобок и избавления от знаменателей получается уравнение

$$p^2 - pk - 1 = 0\,,$$

из которого

$$p=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$$

в полном соответствии с предположением. Гора с плеч!

Конечно, наши рассуждения грешат кое-какими недочетами. В частности, прежде чем переходить к пределу в главном уравнении, следовало бы доказать само существование предела. Но в целом результат следует признать удовлетворительным. И получили мы его, в основном, благодаря компьютеру, ибо не зная броду, куда бы мы сунулись? А подгонять решение под известный ответ – милое дело (в чем с нами согласится любой троечник). Хвала «Пентиуму»!

Вторая задача также связана с последовательностями. Читатель, видимо, неоднократно сталкивался с задачами типа: «Возьмем последовательность натуральных чисел и n раз вычеркнем из нее все числа, стоящие на четных местах. Что получится?» На этот вопрос ответить несложно, как и на подобные вопросы об аналогичных последовательностях (в которых, скажем, вычеркиваются числа, стоящие на нечетных местах, либо попеременно на четных и нечетных и т.п.). Как-то, развлекаясь с подобными экспонатами, автор неожиданно наткнулся на изрядных размеров подводный камень, который сам же, в общем-то, и породил. А именно: возьмем все ту же последовательность натуральных чисел и вычеркнем из нее все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 2 (т.е., другими словами, все четные числа). В получившейся последовательности вычеркнем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 3. Затем вычеркиваем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 4. Ну, и так далее *до бесконечности.* Что за последовательность $\{a_n\}$ получится?

Во-первых, обратим внимание, что какая-то бесконечная последовательность, действительно, получится. В самом деле, после того, как вычеркнуты все числа, номера которых делятся на n, первые n членов образовавшейся последовательности дальнейшим изменениям не подвергнутся, ибо после этого будут вычеркиваться какие-то числа, порядковые номера которых строго больше n. Таким образом, чтобы получить, например, первую сотню членов нашей последовательности $\{a_n\}$, придется проделать указанную операцию 99 раз (вычеркивая последовательно каждое второе, третье, …, сотое число). Вручную проделать нечто подобное даже для не очень больших n – дело немыслимое.

Но позвольте, а «Пентиум» на что? Запряжем-ка его покрепче! Вот и результат: образуется странная последовательность, начинающаяся числами: 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, … Ничего вразумительного о ней сказать нельзя, кроме того, что она возрастает. К нашей радости, компьютер с хорошим программным обеспечением способен помимо вычислений также и строить графики, чем мы не преминем воспользоваться. На рисунке 1 показан график зависимости a_n от n. Хотя зависимость, как видно, явно неравномерная, но *в целом* возрастание a_n весьма регулярное, причем наверняка не линейное, а более быстрое. Какое же?

Здесь пришлось к пяти умам компьютера подключить человеческий и заняться эвристикой, т.е. нестрогими рассуждениями *общего характера*. Допустим, мы взяли не бесконечную последовательность, а лишь a_n первых натуральных чисел и вычеркнули из них каждое второе. Останется *примерно* половина, т.е. $1/2$. Из них вычеркиваем каждое третье. Останется *примерно* $2/3$ остатка. Вычеркнув затем каждое четвертое, оставим *примерно* $3/4$ предыдущего остатка и так далее. Проделав такую операцию n раз, мы дальше, как уже отмечалось, вычеркнуть ничего не сможем, потому что останется как раз n чисел: a_1, a_2, …, a_n. С другой стороны, доля оставшихся чисел (их количество по отношению к количеству исходных) близка к $(1/2)\cdot(2/3)\cdot(3/4)\cdot\ldots\cdot\left((n-1)/n\right)=1/n$. Но если n чисел составляют $1/n$ их исходного количества, то первоначально чисел было n^2. Итак, есть основания робко предположить, что a_n должно быть близко к n^2. Как бы это проверить? Безусловно, с помощью того же компьютера: если он построил график зависимости a_n от n, то кто ему мешает построить график зависимости $\sqrt{a_n}$ от n? Что из этого получилось, читатель может лицезреть на рисунке 2. Впечатляет? Еще бы! Теперь можно уже не робко, а вполне уверенно предполагать, что a_n с ростом n *асимптотически* приближается к kn^2.

Что ж, дело за малым – найти k. Сначала, конечно, вычислим его с возможно большей точностью. Запускаем программу… Готово! Получаем $k = 0{,}785398\ldots$ Господи, что же это? Проницательный читатель уже догадался, а остальные пусть умножат на 4. О ужас – получается π! Это почище золотого сечения! Такой результат способен свалить с ног даже нормального человека, не говоря о любителе математики.

Отдышавшись после нокдауна, пытаемся собрать мысли в кучу. Итак, $k = \pi/4$. Никуда не денешься – придется, как и в предыдущей задаче, объяснить это значение задним числом. Но как? Вспомним наши рассуждения, позволившие предположить, что a_n близко к n^2. Почему

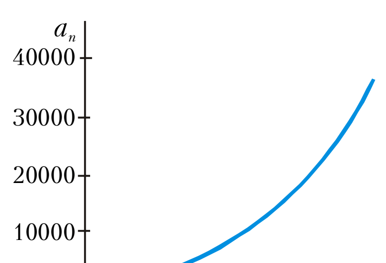

Рис. 1

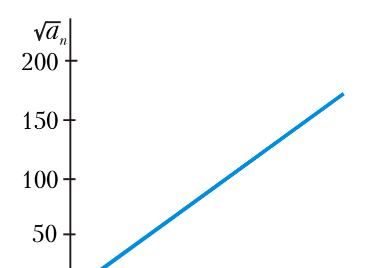

Рис. 2

не получилось просто $a_n = n^2$, т.е. $k = 1$? Несомненно, причина кроется в многократно повторяемых словах «*примерно*». В самом деле, вычеркивая из некоторого количества чисел, скажем, каждое пятое, мы уменьшим их количество ровно на $1/5$ только если оно делится на 5, в противном же случае – меньше, чем на $1/5$. То же верно и при других вычеркиваниях, так что в итоге доля оставшихся чисел окажется несколько больше $1/n$, что повлечет за собой некоторое уменьшение k.

Попытаемся «обналичить» эту идею. Возьмем, как и прежде, a_n первых натуральных чисел. Пусть мы уже вычеркнули каждое второе, третье, …, $(i-1)$-е из них и сейчас собираемся вычеркнуть каждое i-е. Если количество чисел, еще оставшихся перед этой операцией, равно N, то N может давать при делении на i любой из i остатков – от 0 до $(i-1)$ включительно. Для каждого из них количество вычеркнутых чисел, очевидно, равно N/i, $(N-1)/i$, $(N-2)/i$, …, $(N-(i-1))/i$. Естественно считать все возможные остатки *равновероятными*, вследствие чего *среднее количество* вычеркнутых чисел должно быть близко к среднему арифметическому перечисленных значений, которое, в свою очередь, равно

$$\frac{\frac{N}{i}+\frac{N-1}{i}+\frac{N-2}{i}+\ldots+\frac{N-(i-1)}{i}}{i}=$$

$$=\frac{N}{i}-\frac{i-1}{2i},$$

а количество оставшихся чисел составляет

$$N-\left(\frac{N}{i}-\frac{i-1}{2i}\right)=\frac{i-1}{i}N+\frac{i-1}{2i}.$$

Теперь поглядим, во что это выльется, меняя i от 2 до n. Поначалу $N = a_n$, поэтому после вычеркивания каждого второго числа количество оставшихся чисел составит

$$\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2\cdot 2}.$$

После вычеркивания каждого третьего числа это количество равно

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2\cdot 2}\right)+\frac{2}{2\cdot 3}=$$

$$=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3},$$

а после вычеркивания каждого четвертого –

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3}\right)+\frac{3}{2\cdot 4}=$$

$$=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{2\cdot 4}.$$

Дальше, видимо, продолжать не надо – и так все ясно. Закономерность вполне прозрачна, и не составляет труда доказать ее, например, по индукции. Окончательный же результат таков: после вычеркивания каждого n-го числа их всего останется

$$\frac{1}{n}a_n+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{2}{2\cdot n}+\ldots+\frac{n-1}{2\cdot n}=$$

$$=\frac{a_n}{n}+\frac{n-1}{4}.$$

Вспомним, что это окончательное значение должно равняться n, и потому

$$\frac{a_n}{n}+\frac{n-1}{4}=n,$$

откуда $a_n = \left(3n^2+n\right)/4$, и $k = \lim\limits_{n\to\infty} a_n/n^2 = 3/4$. Теперь промах в другую сторону – чуть-чуть недотянули до $\pi/4$. Досадно!

Но где же источник этого промаха? Должно быть, в казавшемся нам естественным предположении о равновероятности остатков. «Все не так, ребята!» – сказал бы по этому поводу В.С.Высоцкий. *А как?*

Похоже, на выбранном пути перспектива отсутствует, поэтому возьмемся за дело в буквальном смысле *с другого конца*. А именно: возьмем n чисел и будем *добавлять* к ним (или, точнее сказать, *вставлять*) сначала каждое n-е, затем – каждое $(n-1)$-е и так далее вплоть до каждого второго.

Отметим теперь следующий факт. Вставляя каждое n-е число, мы наверняка увеличим количество чисел *ровно на* 1. Более того, вставляя затем каждое $(n-1)$-е число, каждое $(n-2)$-е число и так далее некоторое количество раз (зависящее, понятно, от n), мы будем тем самым также добавлять *ровно по одному* числу, пока количество чисел не возрастет настолько, что при очередной вставке окажутся вставленными уже два числа. Затем несколько раз будет вставлено по два числа, пока на очередном шаге не перейдем к трем и так далее.

Упорства нам не занимать – в очередной раз приступим к реализации новой идеи. Пусть мы последовательно совершаем описанные «вставные» операции, добавляя при этом по одному числу. Затем, когда мы начали вставлять каждое x_1-е число, добавилось уже два числа, поскольку значение x_1 в достаточной степени уменьшилось, а общее количество чисел в достаточной степени возросло. Итак, мы продолжаем «вставки», добавляя по два числа, но начиная вставлять каждое x_2-е число, добавляем уже по три числа и так далее.

Если бы удалось найти явную зависимость x_m от m, это было бы большим успехом. Что ж, попытка – не пытка, попробуем. До того, как мы станем вставлять каждое x_m-е число, общее «накопленное» количество чисел, очевидно, стало равно

$$y_m=n+\left(n-x_1\right)+2\left(x_1-x_2\right)+$$

$$+\,3\left(x_2-x_3\right)+\ldots+m\left(x_{m-1}-x_m\right)=$$

$$=2n+\left(x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}\right)-mx_m.$$

То, что при вставке очередного, каждого x_m-го числа, будут добавлены уже не m, а $m+1$ чисел, определяется условием $y_m=(m+1)x_m$ (ведь это как раз и означает, что y_m в достаточной степени возросло, а x_m в остаточной степени уменьшилось). Тогда

$$(m+1)x_m=$$

$$=2n+\left(x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}\right)-mx_m$$

и

$$x_m=\frac{2n+x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}}{2m+1}.$$

Это уже кое-что: получено рекуррентное выражение. А можно ли из него получить явную зависимость x_m от m? Оказывается, да! Не утомляя читателя описанием творческих процессов и сопровождающими их муками и ошибками, приведем сразу результат, который оказался, согласитесь, очень симпатичным и даже слегка красивым:

$$x_m=n\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2m+1)}.$$

Теперь поразмыслим, до каких пор (т.е., точнее говоря, до какого m) будет продолжаться процесс «вставки». Но здесь и размышлять нечего – до тех пор, пока не станет $x_m = 1$ (поскольку дальнейшее добавление означало бы вставку *каждого первого* числа – абсолютный нонсенс!). Но это означает, что наибольшее m связано с n следующим соотношением:

$$\frac{1}{n} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2m}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2m+1)}.$$

Тогда общее число накопленных чисел $y_m = (m+1)x_m = m+1$. Но что из себя представляет y_m? Это количество чисел, которое получилось, если, стартовав от n чисел, мы последовательно вставили в них каждое n-е, затем каждое $(n-1)$-е, каждое $(n-2)$-е, ..., каждое 2-е число. Что получится? Конечно, a_n! Итак, $a_n = y_m = m+1$. Ну, а для нахождения искомого коэффициента k мы должны найти предел a_n/n^2 при $n\to\infty$. Ясно, что при $n\to\infty$ будет и $m\to\infty$, поэтому

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(m+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2m}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2m+1)}\right)^2.$$

Наверняка значение этого предела можно найти в каком-нибудь толстом справочнике. Но мы можем вычислить его и сами, используя знаменитую формулу Стирлинга: $m! \approx (m/e)^m\sqrt{2\pi m}$. Великое ее достоинство в том, что она – асимптотическая: выполняется тем точнее, чем больше m, и, следовательно, как нельзя лучше подходит для вычисления пределов. Правда, числитель и знаменатель нашей дроби не являются факториалами, но могут быть очевидным образом к ним приведены. В числителе, например, достаточно каждый сомножитель поделить на 2, а в знаменателе – между сомножителями вставить... сомножители числителя! И вот что из этого получается:

$$k =$$
$$= \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{(2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2m)^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot2m\cdot(2m+1)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{\left(2^m\cdot m!\right)^2}{(2m)!\cdot(2m+1)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{\left(2^m\cdot(m/e)^m\cdot\sqrt{2\pi m}\right)^2}{(2m/e)^{2m}\cdot\sqrt{4\pi m}\cdot(2m+1)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{\pi m(m+1)}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Прямо в яблочко!

Конечно, и здесь наши рассуждения имеют немало огрехов, но искоренять их как-то не поднимается рука: не навредить бы! Куда приятней почивать на лаврах, но некогда, потому что нас ждет третья задача.

Ее предысторией можно считать другую задачу, предложенную в 1995 году на конкурсе «Математика 6—8»:

Из букв А и Б составлено 1995-буквенное слово. Докажите, что его можно разбить менее чем на 800 более коротких слов, каждое из которых является палиндромом. (Палиндромом называется слово, которое не меняется при перестановке его букв в обратном порядке).

Решение ее таково. Рассмотрим все возможные пятибуквенные слова, состоящие из букв А и Б, и убедимся, что каждое такое слово можно разделить не более чем на два палиндрома. Поскольку буквы А и Б равноправны, то достаточно рассмотреть слова, начинающиеся с буквы А. Поэтому перебор оказывается совсем невелик – всего 16 слов:

ААААА = ААААА
ААААБ = АААА + Б
АААБА = АА + АБА
АААББ = ААА + ББ
ААБАА = ААБАА
ААБАБ = АА + БАБ
ААББА = А + АББА
ААБББ = АА + БББ
АБААА = АБА + АА
АБААБ = А + БААБ
АБАБА = АБАБА
АБАББ = АБА + ББ
АББАА = АББА + А
АББАБ = АББА + Б
АБББА = АБББА
АББББ = А + ББББ

Возьмем произвольное 1995-буквенное слово и разобьем его сначала на 5-буквенные – их будет всего 1995 : 5 = 399. Каждое из этих 5-буквенных слов, в свою очередь, может быть составлено не более, чем из двух палиндромов. Поэтому произвольное 1995-буквенное слово можно составить не более, чем из 399 · 2 = = 798 палиндромов, т. е. меньше чем из 800, что и требовалось доказать.

У въедливого читателя наверняка возник естественный вопрос: чем руководствовался автор задачи, разбивая длинное слово именно на пятибуквенные куски? Неужели только тем, что 1995 делится на 5? Конечно, нет. Число 1995 поначалу вообще не фигурировало. Прежде всего, автор хотел произвести наибольшее впечатление на решающих – чтобы при одной и той же длине исходного слова число кусков-палиндромов оказалось наименьшим. Поэтому он предварительно рассмотрел самые короткие слова, выясняя, на какое число палиндромов можно их разбить. Например, однобуквенное слово – само по себе палиндром. Такие слова из двух букв, как АА и ББ – также палиндромы, но АБ и БА – нет, их приходится разбивать на 2 палиндрома каждое. С трехбуквенными словами тоже возни немного – любое из них может быть составлено не более, чем из двух палиндромов. Несколько больше работы с четырехбуквенными словами, но несложно выяснить, что и здесь всегда хватает двух палиндромов. Для пятибуквенных слов перебор сделан выше – тоже два палиндрома!

На этом пока притормозим, и чтобы разбираться далее с большей научностью, введем в обращение функцию $f(n)$. Определим ее так. Рассмотрим все возможные n-буквенные слова, состоящие из А и Б, и разобьем каждое такое слово на наименьшее возможное число кусков-палиндромов. Из полученных наименьших значений выберем наибольшее. Это и будет $f(n)$.

Нетрудно сообразить, что вычислением $f(n)$ для наименьших n мы как раз только что занимались, и выяснили, что $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 2$. А чему равно $f(6)$? Оказывается, это значение можно найти и без перебора. Прежде всего заметим, что $f(n+1) \le f(n) + 1$ для любого n. Действительно, возьмем $(n+1)$-буквенное слово и отделим от него одну крайнюю букву (безразлично – первую или последнюю). Получится n-буквенное слово, которое (по определению функции f) можно разбить не более, чем на $f(n)$ палиндромов. А так как отрезанная крайняя буква – сама по себе палиндром, то наименьшее число палиндромов, на которые можно разбить $(n+1)$-буквенное слово, не превышает $f(n) + 1$.

Вычислим, наконец, $f(6)$. Из неравенства $f(n+1) \le f(n) + 1$ следует, что $f(6) \le f(5) + 1 = 2 + 1 = 3$. С другой стороны, можно указать 6-буквенное слово, которое нельзя разбить на 2 палиндрома: например, АБААББ. Поэтому $f(6) \ge 3$. Таким образом, $f(6) = 3$. Можно также убедиться, что и $f(7) = 3$, но здесь без перебора (и к тому же весьма объемного) не обойтись.

А теперь вернемся к исходной задаче. Почему все-таки автор сначала делил исходное слово на пятибуквенные части, а не на части другой длины? Как уже отмечалось, глобальная цель состояла в том, чтобы произвести наибольшее впечатление, а для этого следовало свести к минимуму итоговое число палиндромов. Если исходное слово состоит из M букв, то разбив его сначала на n-буквенные части, получим M/n частей (полагаем, что M делится на n). Далее, каждую из этих частей можно разделить не более чем на $f(n)$ палиндромов, в результате чего окончательное число палиндромов становится равным $M \cdot f(n)/n$. Следовательно, надо стремиться к тому, чтобы выбрать такое n, для которого отношение $f(n)/n$ наименьшее, или (что то же самое) отношение $n/f(n)$ наибольшее.

Среди тех n, для которых $f(n)$ нам известно, наилучшим является именно 5, потому что $5/f(5) = 5/2 = 2{,}5$ – это больше, чем для любого другого n, не превышающего 7. Ближайшее к нему значение (несколько худшее) равно $7/f(7) = 7/3 = 2{,}33\ldots$

Итак, при создании задачи автор окончательно остановился на $n = 5$, и лишь затем подобрал подходящее $M = 1995$ – длину исходного слова, кратную n, увязав ее заодно с номером текущего года. Такова история данной задачи.

После выпуска задачи в свет автор долгое время пребывал в блаженной уверенности, что из всех натуральных n именно при $n = 5$ достигается наибольшее значение отношения $n/f(n)$. Эта уверенность значительно окрепла после того, как выяснилось, что $f(8) = 4$, и потому $8/f(8) = 2$ – явное ухудшение результата даже по сравнению с $n = 7$. И потому автор был несказанно потрясен, когда все тот же И.Воронович, незадолго до того ознакомленный с задачей, доказал, что $f(13) = 5$. Разумеется, он при этом применил не прямой перебор (для которого пришлось бы просмотреть более 4 тысяч тринадцатибуквенных слов – сизифов труд!), а лишь частичный, компенсируя недостаток количества высоким уровнем и тонкостью логических рассуждений. Так как $13/f(13) = 13/5 = 2{,}6$, то рекордное прежде отношение, достигавшееся при $n = 5$, оказалось превзойденным! Более того, И.Воронович попытался пощупать и 27-буквенные слова, рассматривая их как пару 13-буквенных с одной буквой между ними и высказал (хотя и не сумел доказать) предположение, что $f(27) = 10$. Если это действительно так, то имеет место новый рекорд: $27/10 = 2{,}7$.

Обсуждение задачи вследствие таких открытий приобрело новый импульс. Проанализировав последовательность рекордов, кто-то выдвинул предположение, что с ростом n отношение $n/f(n)$ стремится к некоторому пределу, и еще кто-то, видимо, совсем ошалев, высказал мысль, что этот предел вполне может равняться e – знаменитому основанию натуральных логарифмов, равному 2,71828... Это полумистическое заявление чуть не повергло всех в шоковое состояние и стимулировало дальнейшие исследования. Ну, а поскольку логические рассуждения ничего не давали, пришлось мобилизовать тяжелую артиллерию, то бишь компьютер, чтобы разобраться, как обстоят дела.

Здесь мы вынуждены мажорные интонации нашего изложения заменить минорными: *компьютер мало чем помог.* Если в предыдущих задачах он был вполне способен работать с последовательностями, содержащими сотни тысяч элементов, то здесь все обстояло гораздо хуже. Поскольку при увеличении длины слова на одну букву количество различных слов возрастает сразу вдвое, то даже возможности «Пентиума» довольно быстро исчерпались. Вспомните знаменитые зерна на шахматной доске! Фактически компьютер оказался ими засыпан, и удалось добраться лишь до 19-буквенных слов. Вот значения $f(n)$ для все n от 9 до 19:

$$f(9) = f(10) = 4,$$

$$f(11) = f(12) = f(13) = 5$$

(Воронович был прав!),

$$f(14) = f(15) = f(16) = f(17) = 6,$$

$$f(18) = f(19) = 7.$$

Негусто, но все-таки лучше, чем ничего. Во всяком случае, имеем новый рекорд: $17/f(17) = 2{,}83\ldots$ Как видим, последовательность отношений $n/f(n)$ перешагнула через число e и, похоже, не намерена останавливаться на достигнутом. Так что сомнительно, что пределом является число e. Тогда, может быть, π? Трудно сказать. Конечно, вполне возможно, что предела нет вовсе, и отношения $n/f(n)$ возрастает неограниченно (хотя и неправильно, с рывками и колебаниями). Правда, рассуждая чисто эвристически, трудно в это поверить. Ведь $n/f(n)$ – это, по сути, средняя длина палиндрома, на которые разбито самое «трудноразбиваемое» n-буквенное слово. Может ли эта средняя длина неограниченно возрастать? Вряд ли. Хотя...

Да, здесь особыми успехами хвастаться не приходится. Более того, не доказано даже неравенство $f(n+1) \geq f(n)$, хотя оно-то вообще выглядит почти очевидным.

В общем, начали во здравие, а кончили за упокой. Печально, но что делать? Одна надежда – на читателей. Возможно, кто-то сумеет составить такую программу, которая вычислит значения $f(n)$ для нескольких сотен первых n, анализируя которые, удастся правильно спрогнозировать ее поведение и найти предел (если он существует, конечно). А может, есть и чисто теоретический путь?

P.S. В течение некоторого времени автору казалось, что рассмотренная задача является частью более общей и наверняка более сложной задачи, а именно: что будет, если в алфавите не 2 буквы, а m букв, где m – заданное натуральное число? Таким образом, от частной задачи изучения функции от одной переменной $f(n)$ мы переходим к более общей задаче изучения функции $f(m,n)$.

Оказалось, однако, что эти сложности – фиктивные: для всех m, кроме $m = 2$, задача решается чрезвычайно просто.

Если $m = 1$, то все слова состоят из одинаковых букв, поэтому являются палиндромами. Поэтому $f(1, n) = 1$ для любого n.

Если же $m > 2$, то можно показать, что $f(m,n) = n$. Для этого возьмем лишь три различных буквы (А, Б и В) и составим из них вот такую бесконечную в обе стороны последовательность:

...АБВАБВАБВАБВАБВАБ

ВАБВАБВАБВ...

Вырезанное из нее слово любой длины, как нетрудно заметить, можно разбить на палиндромы, только «рассыпав» на отдельные буквы.