Комнат, куда можно пытаться переселять школьника B, не менее 60 — 1— 30 = 29, поскольку одну из 60 комнат занимает сам школьник и не более 30 комнат занимают его знакомые. Поскольку знакомых у школьника B не более 30, причем один из них – это школьник A, то из наличия препятствий к поселению B во все комнаты, где у него нет знакомых, следует, что B знаком, кроме A, с 29 школьниками и у каждого из этих школьников все знакомые, кроме B, живут в одной комнате. Теперь ясно, что взяв любого отличного от B школьника C, знакомого со школьником A, мы можем переселить C в новую комнату. После ряда таких переселений условие задачи будет удовлетворено.

13. Поскольку AA_1, BB_1, CC_1 – высоты, то четырехугольники ABA_1B_1 и BCB_1C_1 – вписанные, значит, $\angle C_1BM = \angle C_1B_1A = \angle A_1B_1C = \alpha$. Так как C_1M – медиана прямоугольного треугольника BC_1C, выходящая из прямого угла, то $\angle BC_1M = \alpha$, откуда $\angle YC_1X = \angle YB_1X = \alpha$. Точки X и Y лежат в одной полуплоскости с границей BC. Предположим для определенности, что в этой же полуплоскости лежит и вершина A. Тогда четырехугольник XYC_1B_1 – вписанный, и $\angle YXC_1 = \angle YB_1C_1 = \angle C_1BM$. Значит, $XY \parallel BC$.

14. Поскольку $\max(a,b) \ge a \ge \min(a,c)$, из условия задачи следует неравенство $\max(c,1997) \le \min(b,1998)$, откуда $c \le \max(c,1997) \le \min(b,1998) \le b$.

15. Пусть H – основание высоты, опущенной из A на BC. Угол BCD – прямой, так как BD – диаметр. Четырехугольник $BECD$ составлен из треугольников BCD и BCE, в которых DC и EH – высоты, опущенные на BC. Значит, $S_{BECD} = \frac{1}{2}BC(EH + CD)$. Поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH$, достаточно доказать равенство $EH + CD = AH$. Сумма $EH + CD$ есть сумма проекций отрезков CE и CD на прямую AE (прямые AE и DC параллельны как перпендикуляры к BC). Отрезок AH есть сумма проекций отрезков AD и DC на прямую AE. Проекции отрезков CE и AD на прямую AE равны, поскольку $ADCE$ – равнобочная трапеция.

16. Пусть закрытый мост M соединяет острова A и B. Расстояние (наименьшее число мостов) между какими-то островами может увеличиться при закрытии моста M только в том случае, когда до закрытия любой кратчайший путь между этими островами проходил через M. Кроме того, ясно, что любой участок кратчайшего пути тоже является кратчайшим путем, и кратчайший путь не может проходить через один остров два раза.

Предположим, что утверждение задачи не выполняется, т.е. на каждом острове кто-то живет. Сначала докажем, что после закрытия моста M с острова A можно добраться до острова B. Для этого рассмотрим человека, живущего на острове A. Пусть его друг, расстояние до которого увеличилось на один мост, живет на острове X. Поскольку кратчайший путь от A до X должен был проходить через мост M, он состоял из переезда через M и некоторого кратчайшего маршрута от B до X, который при этом не проходил через M. Значит, от A до B после закрытия моста M можно добраться, проехав сначала от A до X, а потом от B до X.

Рассмотрим кратчайший путь между островами A и B после закрытия моста M. Выберем остров C посередине или «почти посередине» этого пути, т.е. так, чтобы расстояния от C до A и B отличались не более чем на 1. Пусть Y – тот остров, расстояние от C до которого увеличилось на один мост. Рассмотрим кратчайший путь от C к Y до начала ремонта. Пусть, например, он шел сначала от C к A, потом через мост M на B, а потом от B к Y. Рассмотрим вместо этого путь, который сначала идет от C к B (по участку кратчайшего пути от A к B), а потом от B к Y так же, как и в первом пути. Этот путь CBY не длиннее исходного пути $CABY$, так как участок CB отличается от участка CA не более чем на 1. Значит, существовал кратчайший путь от C к Y, не проходящий через мост M. Это противоречит тому, что расстояние от C до Y увеличилось.

17. Всякая проходящая через центр куба плоскость делит куб на две части, симметричные относительно центра куба. Обратно, всякая плоскость, делящая куб на части равного объема, проходит через центр куба. Действительно, в противном случае можно было бы параллельно перенести плоскость, чтобы она стала проходить через центр куба. При таком движении объем одной из частей куба увеличится, а объем другой – уменьшится, что невозможно, так как после переноса объемы опять должны быть равными.

Итак, обе плоскости проходят через центр куба. Каждая из образовавшихся четвертей куба представляет собой объединение нескольких пирамид с вершинами в центре куба. Высоты этих пирамид равны половине ребра куба. Следовательно, объем любой из четвертей куба равен одной шестой длины ребра куба, умноженной на площадь соответствующей части поверхности куба. Поэтому плоскости делят поверхность куба на части равной площади.

18. В силу свойства вписанных углов, $\angle EFD = \angle EOD = \angle BAD = \angle BCD$, поэтому четырехугольник $BFDC$ – вписанный. Тогда

$$\angle BCF = \angle BDF = \angle OEF = \angle OAB = \angle ACD,$$

откуда $\angle BCA = \angle FCD$.

19. Проведем все вертикали и горизонтали, пересекающие многоугольник. Пусть в результате получилось n вертикальных прямых и m горизонтальных. Поскольку каждая из этих прямых пересекает стороны многоугольника по крайней мере в двух точках, то достаточно доказать неравенство $m + n \ge 20$. Действительно, если $m + n \le 19$, то $mn \le 90$.

20. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, K и L – ее проекции на стороны BC и AD, M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Пусть P и Q – середины отрезков AO и OB соответственно. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла, равна половине гипотенузы, то $MP = BO/2 = KQ$, $LP = AO/2 = MQ$. Поскольку треугольники AOL и BOK подобны, $\angle APL = \angle BQK$, также $\angle APM = \angle AOB = \angle BQM$, значит, $\angle MPL = \angle MQK$. Следовательно, $\Delta MPL = \Delta KQM$ и $ML = KM$. Аналогично, $KN = NL$, и точки K и L симметричны относительно прямой MN.

21. Пусть N – сумма чисел на одном листе, n – наибольшее целое число, для которого $2^n \le N$. Тогда сумма чисел на всех листах равна $10N$. Если никакая степень двойки не встречается более 5 раз, то их сумма не превосходит

$$5\left(2^n + 2^{n-1} + \ldots + 1\right) = 5\left(2^{n+1} - 1\right) = 10 \cdot 2^n - 5 < 10N.$$

22. Могут. Сопоставим городам числа c_1, c_2, ..., c_{1998} так, чтобы все суммы $c_i + c_j$ пар чисел были различными (например, можно положить $c_i = 2^i$). Пусть цена билета между двумя городами равна сумме чисел, сопоставленных этим городам. Тогда все цены различны, и стоимость любого кругового маршрута равна $2(c_1 + c_2 + \ldots + c_{1998})$.

23. По теореме о вписанном угле, угол $\angle EFC$ равен половине величины дуги EC окружности ECF. По теореме об угле между хордой и касательной, $\angle ECA$ тоже равен половине дуги EC. Поскольку четырехугольник $ADEC$ вписанный, $\angle ECA = \angle EDB$. Таким образом, $\angle EFC = \angle EDB$. Значит, прямые AB и CF параллельны. Обозначим через G точку пересечения прямых AE и BK. Поскольку прямые BC и AG пересекаются на медиане KD треугольника ABK, то $CG \parallel AB$.