ружности через одно. Значит, все они одного знака, что противоречит условию задачи.

2. а) Если бы каждая цифра встречалась не более 5 раз, то всего было бы не более $5 \cdot 9 = 45$ цифр. Следовательно, некоторая цифра встречается по крайней мере 6 раз, т. е. можно вычеркнуть цифры так, что останется число из 6 одинаковых цифр. Оно делится на $111111 = 111 \cdot 1001$. б) $41 \cdot 271 = 11111$.

3. Докажем, что $\angle EAD = \angle EDA$ (рис. 15). Поскольку $\angle EDA = \angle CDF$, достаточно доказать, что $\angle EAD =$

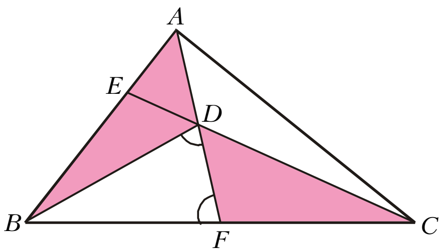

Рис. 15

$= \angle FDC$. Треугольники ADB и DFC равны по двум сторонам и углу между ними: $AD = DF$, $DB = BF = FC$, $\angle ADB = 180° - \angle BDF = 180° - \angle BFD = \angle DFC$. Значит, $\angle EAD = \angle FDC$, что и требовалось.

Более простое решение можно получить, если рассмотреть медианы треугольника BDF (рис. 16).

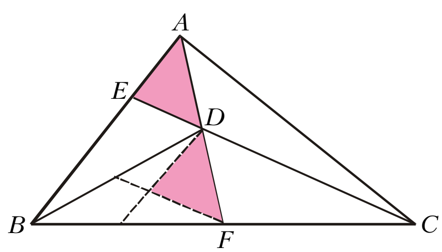

Рис. 16

4. 4,75.

5. *Указание.* Рассмотрите гомотетию с центром A, переводящую точки K и L в середины отрезков AB и AC.

6. Если никакой корень многочлена $f(x) - 10$ не является корнем производной, то многочлен $f(x) - 10$ меняет знак в десяти точках, так что его степень четна. Аналогично из условия следует, что многочлен $f(x) - 15$ меняет знак в пятнадцати точках, так что его степень нечетна. Этого не может быть, поскольку упомянутые многочлены имеют одинаковые степени.

7. 99. Пример – числа от 10001 до 10099. Действительно, все эти числа лежат в промежутке от $100 \cdot 100$ до $100 \cdot 101$, поэтому не могут быть представлены в виде произведения двух трехзначных чисел, так как $100 \cdot 100$ и $100 \cdot 101$ – два наименьших произведения трехзначных чисел. С другой стороны, среди любых 100 подряд идущих пятизначных чисел обязательно встретится число, кратное 100.

8. Разрежем квадрат на блоки размером 2×2. Любой блок либо весь одного цвета, либо две его клетки синие, а две – красные. Значит, в каждом блоке количество синих клеток четно. Следовательно, и во всем квадрате количество синих клеток четно.

9. 7 служащих. *Указание*. Разность количеств денег у первого и второго служащих всегда делится на количество служащих.

10. Пусть числа расставлены в вершинах правильного 30-угольника. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, 15$ проведем луч из точки числа k через точку числа $31 - k$. Если числа вида k и $31 - k$ расположены в соседних вершинах 30-угольника и меняются местами, то соответствующий луч меняет свое направление на 180°. Каждому лучу сопоставим угол, на который нужно его повернуть по часовой стрелке, чтобы после поворота его направление совпало бы с положительным направлением оси абсцисс. Проследим за суммой этих углов (следует помнить, что углы измеряются с точностью до кратных 360°).

Если числа вида k и $31 - k$ ни разу не меняются местами, то при каждой операции один из лучей поворачивается на такой же угол, на какой в противоположном направлении поворачивается другой луч (на рисунке 17 вместо 30-угольника взят 10-угольник и показано, что происходит с лучами, когда меняются местами числа 2 и 6). Если каждое число после не-

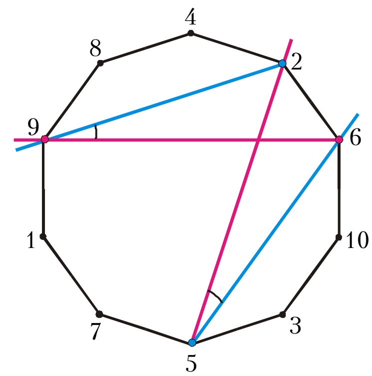

Рис. 17

скольких операций переместится на диаметрально противоположное место, то все 15 лучей изменят свои направления на противоположные. Значит, сумма углов изменится на $15 \cdot 180°$. Получили противоречие: сумма при операциях не менялась, а $15 \cdot 180°$ не кратно 360°.

11. Приведем пример такой последовательности. Пусть $a_{2000} = 3$, $a_{1999} = 4$. Числа a_n при $n > 2000$ определим по данной в условии формуле. Числа a_n при $1 \le n \le 1998$ построим «обратным ходом» (т. е. сначала a_{1998}, потом a_{1997} и так вплоть до a_1) по формуле $a_n = (a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1)$. Очевидно,

$$4 = a_{1999} < 6 = a_{1998} < a_{1997} < \ldots < a_1 .$$

Убедимся, что построенная последовательность удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = \text{НОД}(a_n, a_{n+1}) + 1$. При $n \ge 1999$ это выполняется по определению, при $n = 1998$ проверяется непосредственно, а при $n \le 1997$ имеем $\text{НОД}(a_n, a_{n+1}) = \text{НОД}((a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1),\ a_{n+1}) = \text{НОД}(a_{n+2} - 1,\ a_{n+1}) = \text{НОД}(a_{n+2} - 1, (a_{n+2} - 1)(a_{n+3} - 1)) = a_{n+2} - 1$, что и требовалось.

12. Расселим сначала школьников произвольным образом. Если какие-то двое знакомых при этом окажутся в одной комнате, то у каждого из них в других комнатах не более чем 29 знакомых, так что найдется комната, в которой ни у одного, ни у другого знакомых нет. Переселим одного из двоих в такую комнату. Если после этого опять какие-то два знакомых школьника окажутся в одной комнате, то выполним еще одно переселение. Так будем действовать, пока будем находить знакомых в одной комнате.

Если после этого все знакомые некоторого школьника A оказались в одной комнате и число этих знакомых больше 1, то рассмотрим одного из этих знакомых – школьника B. Подумаем, что может помешать поселить B в некоторую новую комнату, в которой у него нет ни одного знакомого? Только то, что именно в этой комнате живут все знакомые одного из его знакомых.