треугольник BCD, O_2 – центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ACD, M – середина отрезка CB (рис.5).

Треугольник DO_1O_2 – прямоугольный и $O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 + O_2D^2}$. Найдем радиусы окружностей: $O_2D = \dfrac{CD}{2\sin A} = \dfrac{25}{12}$; в треугольнике BCD полупериметр равен 4, $DM = 2$, $S_{BDM} = 3$, поэтому $O_1M = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3}{4}$, а $O_1D = DM - O_1M = \dfrac{5}{4}$.

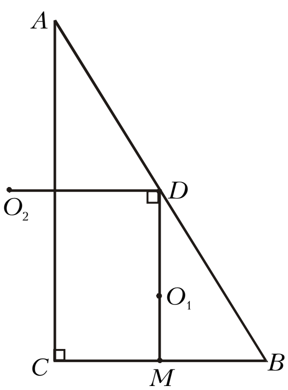

Рис. 5

4. 2; $15\ln 2 - 9$. *Решение.* Прямая $y = -18x + 9$ является касательной к графику функций $y = 9e^{-ax}$ в точке (0; 9), так как эта точка принадлежит обеим линиям, а по условию фигура M и прямая $y = -18x + 9$ имеют только одну общую точку. Следовательно, имеем

$$-18 = \left(9e^{-ax}\right)'\Big|_{x=0} = -9a,$$

откуда $a = 2$.

Найдем точки пересечения кривых $y = f_1(x) = 9e^{-2x}$ и $y = f_2(x) = 15 - 4e^{2x}$:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3},\ x_2 = \frac{\ln 3}{2}.$$

Площадь фигуры M равна

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(15 - 4e^{2x} - 9e^{-2x}\right)dx = \left(15x - 2e^{2x} + \frac{9}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}}^{\frac{1}{2}\ln 3} = 15\ln 2 - 9.$$

5. $13/12$; $\pi/6$.

Построение плоскости сечения α. Точки K и E лежат в плоскости α, поэтому прямая KE лежит в этой плоскости (рис.6). Пусть M, L – точки пересечения прямых AA_1 и KE, A_1B_1 и KE соответственно. Так как $M \in \alpha$ и $K \in \alpha$, то прямая MK принадлежит α. Далее (с менее подробным изложением) найдем точки пересечения плоскости α с ребрами призмы. Проведем прямую MF, пересекающую ребро AC в точке P. Аналогично проведем прямую LF, пересекающую ребро B_1C_1 в точке N. Соединим точки F, P, E, K, N, F. Сечение построено.

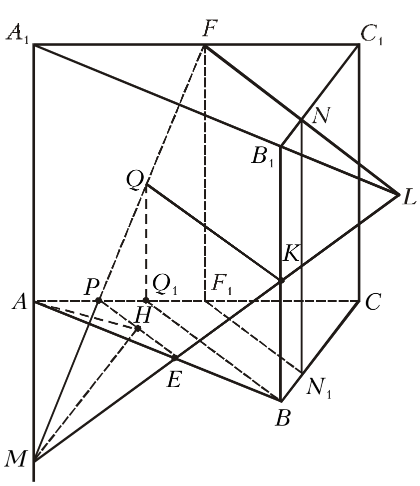

Рис. 6

Вычисление площади сечения S и угла φ между плоскостями. Введем обозначения: $AB = a$, $B_1B = h$. Пятиугольник $EPFNK$, в котором PE и FN параллельны, разбивается на две трапеции прямой, проходящей через точку K параллельно PE и пересекающей PF в точке Q. Из равенства треугольников AME и EKB получим, что $MA = BK = h/2$. Из подобия треугольников MAP и A_1MF получим $AP = (1/3)A_1F$ и, следовательно, $AP = (1/6)a$. По теореме косинусов в треугольнике APE найдем: $PE^2 = a^2/36 + a^2/4 - 2(a/6)(a/2)(1/2)$, т.е. $PE = a\sqrt{7}/6$. Спроектируем сечение на плоскость ABC. Пусть Q_1, F_1, N_1 – проекции точек Q, F, N. Тогда $F_1N_1 = FN$, отрезки F_1N_1, BQ_1, PE попарно параллельны и $AP = PQ_1 = Q_1F_1 = a/6$, $BQ_1 = 2PE$, $F_1N_1 = (3/4)BQ_1 = (3/2)PE = a\sqrt{7}/4$. Итак, $FN = a\sqrt{7}/4$. Пусть x – расстояние между прямыми PE и Q_1B. Для нахождения x воспользуемся тем, что высота AH в треугольнике APE равна x. Вычислим двумя способами площадь треугольника APE. Имеем $(1/2)AP\,AE\sin\pi/3 = (1/2)PE\,x$, откуда получим $x = (a/4)\sqrt{3/7}$. По теореме о трех перпендикулярах MH перпендикуляра PE, т.е. $\angle\varphi = \angle AHM = \mathrm{arctg}(AM/AH) = 1/\sqrt{3} = \pi/6$. Площадь проекции искомого сечения $S_1 = x\left(PE + Q_1B\right)/2 + x\left(Q_1B + F_1N_1\right)/2 = 13a^2\sqrt{3}/96 = 13\sqrt{3}/24$. Искомая площадь $S = S_1/\cos\varphi = 13/12$.

6. (3; 29), (1; –17), (19; 397), (–15; 191). *Решение*. Выразив y через x, получим

$$y = \frac{x^3 - 7x + 23}{x - 2}.$$

Выделим целую часть, преобразовав дробь:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 2\left(x^2 - 2x\right) - 3(x - 2) + 17}{x - 2},$$

т.е.

$$y = x^2 + 2x - 3 + \frac{17}{x - 2}. \qquad (*)$$

Целые значения y примет при целых x тогда и только тогда, когда дробь $\dfrac{17}{x-2}$ примет целые значения, т.е. в следующих случаях: $x - 2 = 1$, $x - 2 = -1$, $x - 2 = 17$, $x - 2 = -17$. Отсюда находим: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 19$, $x_4 = -15$ а затем из равенства $(*)$ находим: $y_1 = 29$, $y_2 = -17$, $y_3 = 397$, $y_4 = 191$.

Вариант 2

1. (2; –3), (–6; 1). *Указание.* Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} xy(x + 2y) > 0, \\ (x + 2y)^2 = 16, \\ \left|\dfrac{xy}{6}\right| = 1. \end{cases}$$

2. $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Указание. Неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} -\sin x < 0, \\ \begin{cases} -\sin x \ge 0, \\ \dfrac{5 + 3\cos 4x}{8} > \sin^4 x. \end{cases} \end{array}\right.$$