«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. Заднее колесо трактора за секунду совершит ровно один оборот.

2. См. таблицу:

	7«А»	7«Б»	7«В»	7«Г»	Σ
7«А»		3:0	2:1	2:0	7:1
7«Б»	0:3		0:0	2:0	2:3
7«В»	1:2	0:0		2:1	3:3
7«Г»	0:2	0:2	1:2		1:6

3. Обозначим угол AOB через α, тогда $\angle AOD = \frac{\alpha}{2}$, а $\angle DOC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Угол COB равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$, а $\angle COE = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\angle DOE = \angle DOC + \angle COE = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

4. Разобьем гирьки на 50 пар соседних гирек. Затем эти 50 пар разобьем на две кучки по 25 пар. Теперь из первой кучки положим на левую чашку весов более тяжелую гирьку из каждой пары, а на правую – более легкую. Со второй кучкой поступим наоборот – на левую чашку положим более легкие гирьки из пар, а на правую – более тяжелые. Очевидно, что в результате весы окажутся в равновесии.

5. Судья не всегда сможет сделать расписание на оставшиеся 2 дня. Например, если в первые три дня команды играли

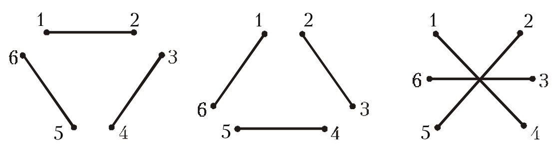

Рис. 1

так, как показано на рисунке 1 (отрезками соединены номера команд, играющих в этот день), невозможно было бы устроить расписание даже только на четвертый день. Действительно, команда с нечетным номером может играть лишь с командами, имеющими нечетные номера, но таких команд три, следовательно, одной из них не с кем будет играть в четвертый

(см. «Квант» №6)

1. Смогут. Поскольку Буратино не хватает 18 сольдо, а Мальвине не хватает 7 сольдо, у Мальвины есть по крайней мере 18 – 7 = 11 сольдо. Если она добавит их к деньгам Пьеро, то денег на букварь, конечно же, хватит.

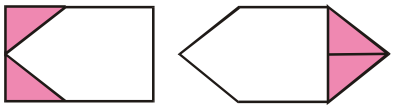

Рис. 2

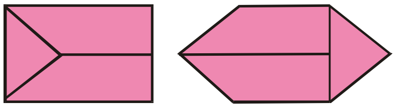

Рис. 3

2. См. рис. 2, 3.

3. Число 220 нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, все цифры которых нечетны.

4. 1665. Сумма последних цифр трех исходных трехзначных чисел оканчивается на 5. Числа 5 и 25 не представимы в виде суммы трех ненулевых различных цифр. Значит, сумма последних цифр равна 15. Тогда, сумма средних цифр тоже равна 15, и сумма первых цифр тоже 15. Теперь ясно, что после перестановки мы получим три числа, сумма которых 1665.

Напоследок предъявим тройку чисел (одну из возможных), которая удовлетворяет условию задачи: 159, 672, 834.

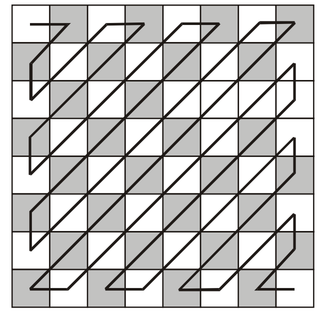

Рис. 4

5. На рисунке 4 король сделал 49 диагональных ходов. Доказать, что число 49 максимальное возможное, очень просто. Каждый диагональный ход проходит через один узел шахматной доски. (Узлом мы здесь называем общую точку 4 клеток шахматной доски.) Всего узлов 49. Два раза пройти через один и тот же узел без самопересечения пути невозможно.

МЕТАМОРФОЗЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Π_9, Π_{10}, Π_{11}. Если считать, что в момент отплытия лодки отправляется автобус №0, то турист должен сесть в автобус №66. (Решение аналогичной задачи см. на с. 87–88 в журнале «Квант» №1/2 за 1993 г.)

2. $P_4(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$,

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}.$$

3. $S_k(0) = \int_0^0 P_k(x)dx = 0$.

4. *Указание*. Коэффициент при старшей степени многочлена $P_k(x)$ равен 1.

5. $-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2\cos\frac{1}{2}}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Указание.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\pi+1)k + \cos(\pi-1)k\right).$$

АНАЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

1. $T = \frac{kq\lambda}{R}$. **2.** $T = \sigma R$. **3, 4, 5.** $\Delta W = -W_0/2$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* В каждом из случаев $\cos x > 0$ и $\cos x < 0$ выполните подстановку $t = \frac{\cos 3x}{\cos x}$.

2. $x < \frac{34 - 30\sqrt{2}}{23}$, $x \geq 3$.

3. $\frac{5\sqrt{34}}{12}$. *Решение.* Точка D является центром описанной около треугольника ABC окружности, $AB = 5$, $AC = 4$. Пусть O_1 – центр окружности, вписанной в равнобедренный