# Замечательные последовательности

В третьем туре предыдущего конкурса «Математика 6—8» с легкой руки Анатолия Павловича Савина была предложена следующая задача:

*В последовательности $a_1$, $a_2$, $a_3$, … число $a_1$ равняется 1799, а число $a_2$ равняется 1828. Каждое из следующих чисел находится по закону $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{a_{n-1}}$. Чему равняется $a_{1997}$?*

Несколько неожиданным представляется тот факт, что, начиная с шестого номера, значения членов последовательности $\{a_n\}$ повторяются: $a_6 = a_1$, $a_7 = a_2$, $a_8 = a_3$ и т.д. Обнаружив и обосновав эту закономерность, уже без труда можно рассчитать величину $a_{1997} = a_{5\cdot 399+2} = a_2 = 1828$.

Некоторые школьники сочли, что с этой задачей играючи справится компьютер. Для этого достаточно составить простенькую программу, что-то вроде:

$a_{\text{пред пред}} := 1799$;
$a_{\text{пред}} := 1828$;
$i := 2$;
<u>начало цикла</u> <u>пока</u> $i < 1997$
$i := i + 1$;
$a := (a_{\text{пред}} + 1)/a_{\text{пред пред}}$;
$a_{\text{пред пред}} := a_{\text{пред}}$;
$a_{\text{пред}} := a$
<u>конец цикла</u>;
вывод $a$.

Рассуждавшие так попали в ловушку! Дело в том, что с абсолютной точностью компьютер умеет обрабатывать лишь *целые* числа, а вот *дробные* числа, хотя и с достаточно высокой точностью, вычисляются им *приближенно.* Так, например, для числа $a_{1997}$ железный вычислитель может выдать результат $1{,}8280000000000000 \cdot 10^3$, гарантируя лишь 16 точных значащих цифр после запятой. Что располагается начиная с 17-го места после запятой и далее − для компьютера «покрыто мглой». В данном случае он может лишь *подсказать* наблюдательному исследователю возможную закономерность, наличие же ее нужно обосновывать иным способом, например с помощью алгебраических выкладок. Кстати, для обоснования периодичности последовательности $\{a_n\}$ недостаточно убедиться лишь в единичном совпадении $a_6 = a_1$, как это сделали некоторые из участников конкурса. Каждый член последовательности $\{a_n\}$ зависит *от двух* предыдущих членов, поэтому необходимо обязательно убедиться также в том, что $a_7 = a_2$.

Замечательные числовые последовательности — частые гости у тех, кто подружился с числами. Возьмем первые 9 членов арифметической прогрессии 143, 286, 429, …, 1287 и умножим их на число 777. В итоге получим последовательность 111111, 222222, 333333, …, 999999. Этот пример умножения «с некоим удивлением» приводит уже автор первого российского учебника по математике Леонтий Магницкий (1669—1739).

Следующая замечательная последовательность описана в книге Жака Арсака «Программирование игр и головоломок» (М.: Наука, 1990). В качестве начального члена последовательности выберем произвольное натуральное число. Все остальные члены последовательности получаются по правилу: за любым элементом последовательности следует число, равное сумме кубов всех цифр данного элемента. Например,

$b_1 = 27$;
$b_2 = 2^3 + 7^3 = 8 + 343 = 351$;
$b_3 = 3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = 153$;
$b_4 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$;

и т.д.

Любопытно, что какое бы начальное число $b_1$, делящееся на 3, мы ни взяли, рано или поздно мы неизбежно придем к числу 153. Этот замечательный факт помог доказать компьютер.

Прежде всего заметим, что все члены последовательности $\{b_n\}$ принадлежат единому семейству чисел, кратных трем (пожалуйста, убедитесь в этом самостоятельно). Далее замечаем, что для элемента последовательности $b_n$, больше некоторого порога, следующий элемент $b_{n+1}$ всегда меньше своего предшественника. Действительно, для $k$-значного числа $b_n$ сумма кубов его цифр ограничена сверху числом $k \cdot 9^3 = 729k$. При $k \geq 5$ имеем $b_n \geq 10^4 > 3645 =$