щих двух сил натяжения, равных в сумме $2T\Delta\alpha$. Таким образом, в соответствии со вторым законом Ньютона, в проекции на радиальное направление имеем

$$\left(\frac{m}{2\pi R}R\cdot 2\Delta\alpha\right)\frac{(2\pi Rn)^2}{R}=2T\Delta\alpha,$$

откуда получаем

$$T=2\pi Rn^2m.$$

Задача 4. *Тонкое проводящее кольцо радиусом R, по которому течет ток I, расположено в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, причем вектор поля перпендикулярен плоскости кольца. Найдите величину силы натяжения, возникающей в кольце.*

На рисунке 2 выделен элементарный участок кольца длиной $R\cdot 2\Delta\alpha$ с током I в магнитном поле, причем вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен к читателю. В соответствии с законом Ампера, участок испытывает со стороны магнитного поля действие силы, равной $\Delta F=I(R\cdot 2\Delta\alpha)B$ и направленной так, как показано на рисунке 2. Обратим внимание на то, что закон Ампера применим только к прямолинейному отрезку проводника с током, так что мы должны потребовать, чтобы угол $\Delta\alpha$ был мал. Учитывая, что выделенный участок кольца покоится, из

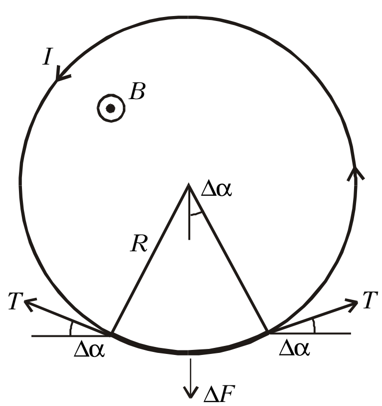

Рис. 2

второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление имеем

$$0=2T\Delta\alpha-I(R\cdot 2\Delta\alpha)B,$$

откуда

$$T=IRB.$$

По-видимому, родственный характер явлений, рассматриваемых в задачах 3 и 4, не так очевиден, как в задачах 1 и 2, но структура решений двух последних задач делает их близкими.

Аналогию, обнаруживаемую при сравнении рисунков 1 и 2, можно усилить, если задачу 3 решать в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг центра обруча, так что в этой системе обруч покоится. Тогда кроме сил натяжения, показанных на рисунке 1, на участок обруча будет действовать еще центробежная сила инерции $\Delta\vec{F}$, направленная против вектора ускорения $\vec{a}$ и равная по величине Δma, т.е.

$$\left(\frac{m}{2\pi R}R\cdot 2\Delta\alpha\right)\frac{(2\pi Rn)^2}{R}.$$

Картина сил качественно совпадает с показанной на рисунке 2. Более того, как и в задаче 4, соответствующий участок обруча теперь покоится. Таким образом, сменив систему отсчета, мы усилили аналогию.

Сравнивая ответы в задачах 3 и 4, можно также обнаружить некие соответствия: совсем понятное $R\leftrightarrow R$, вызывающее сочувствие $nm\leftrightarrow I$ и загадочное $2\pi n\leftrightarrow B$.

Задача 5. *Покажите, что минимальная работа по зарядке первоначально незаряженного конденсатора равна $QU(Q)/2$. Здесь Q и $U(Q)$ – окончательные заряд конденсатора и напряжение между его пластинами.*

На рисунке 3 изображен график зависимости напряжения на конденсаторе от величины его заряда. В соответствии с определением электрической емкости,

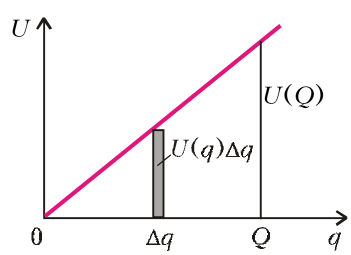

Рис. 3

$$U(q)=\frac{1}{C}q.$$

Из графика видно, что величина U, численно равная работе внешней силы по переносу единичного положительного заряда с отрицательно заряженной пластины конденсатора на положительно заряженную, тем больше, чем больше заряд q конденсатора. Работа по дополнительной зарядке конденсатора от заряда q до $q+\Delta q$ равна $U(q)\Delta q$ – на рисунке 3 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работа по зарядке конденсатора от $q=0$ до $q=Q$ может быть найдена как сумма произведений $U(q)\Delta q$, т.е. как площадь прямоугольного треугольника с катетами Q и $U(Q)$:

$$A=\frac{1}{2}QU(Q).$$

Задача 6. *Покажите, что минимальная работа по строительству вертикальной однородной колонны массой m и высотой H из материала, первоначально расположенного в тонком слое на горизонтальной плоскости, совпадающей с основанием колонны, равна $mgH/2$, где g – ускорение свободного падения. Площадь поперечного сечения колонны одинакова по всей высоте.*

Известно, что формула mgh позволяет найти потенциальную энергию небольшого тела массой m, поднятого на высоту h над нулевым уровнем, от которого отсчитывается потенциальная энергия. Соответственно, величина gh может рассматриваться как минимальная работа по поднятию на высоту h единичной массы.

Пусть ρ – плотность материала, из которого строится колонна:

$$\rho=\frac{m}{SH},$$

где S – площадь поперечного сечения колонны. На рисунке 4 представлен график зависимости величины gh от массы колонны (в процессе ее строительства) ρSh. График показывает, что чем больше высота, а значит, и масса ρSh уже построенной части колонны, тем большую работу gh следует совершить по подъему очередной единичной массы. Работа по увеличению высоты колонны от h до $h+\Delta h$ равна $gh\cdot\rho S\Delta h$ – на рисунке 4 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работу по строительству всей колонны можно найти как площадь прямоугольного треугольника с катетами m и gH:

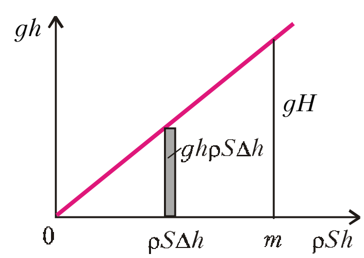

Рис. 4

$$A=\frac{1}{2}mgH.$$

В задачах 5 и 6 аналогичны структуры мысленных экспериментов по зарядке конденсатора и сооружению колонны; аналогичны также методы решения и структуры ответов.

Задача 7. *Два тела массами m_1 и m_2 движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Происходит абсолютно неупругий удар, в результате которого тела объединяются. Сколько тепла выделится в результате удара?*

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v},$$