Аналогии в задачах по физике

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

Довольно часто при решении задачи обнаруживается, что она аналогична какой-то другой, уже решенной, причем степени близости задач могут быть весьма разнообразными. Заметив аналогию новой и старой задач, мы получаем дополнительный шанс на успех в поисках решения новой. В этом смысле «рассуждение по аналогии» является одним из методов решения задач (наряду с такими, как соображения симметрии или размерностей, преобразования системы отсчета, использование графиков или векторных диаграмм и т.п.).

В качестве примеров рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Поршневым воздушным насосом откачивают воздух из сосуда объемом V. Рабочий объем камеры насоса V_0. Во сколько раз уменьшится давление в сосуде после n ходов поршня? Переход воздуха из сосуда в камеру насоса считайте изотермическим процессом.*

В каждом цикле работы насоса будем различать два процесса: один – это изотермическое расширение воздуха от объема V до объема $V + V_0$, другой – освобождение камеры насоса от воздуха, оказавшегося в ней в конце первого процесса.

В соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона, число молей воздуха, производящего в объеме V давление p при температуре T, равно

$$\nu = \frac{pV}{RT},$$

где R – универсальная газовая постоянная. В первом акте расширения воздуха условие сохранения количества молей воздуха с учетом постоянства температуры можно описать уравнением

$$pV = p_1(V + V_0).$$

После удаления воздуха из камеры насоса и возврата поршня в исходное положение произойдет второе расширение оставшегося в сосуде воздуха:

$$p_1V = p_2(V + V_0),$$

затем третье, четвертое... и, наконец, n-е расширение воздуха:

$$p_{n-1}V = p_n(V + V_0).$$

Перемножив соответственно левые и правые части этих n уравнений, получим

$$pV^n = p_n(V + V_0)^n.$$

Отсюда после простых преобразований окончательно находим ответ на вопрос задачи:

$$\frac{p}{p_n} = \left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^n.$$

Задача 2. *Конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U и отсоединен от источника. К этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью C_0. Когда заканчивается перераспределение зарядов, зарядившийся второй конденсатор (емкостью C_0) отсоединяют от первого конденсатора (емкостью C). Затем к первому конденсатору присоединяют следующий незаряженный конденсатор емкостью C_0 и т.д. Во сколько раз уменьшится напряжение на конденсаторе емкостью C после n подключений конденсаторов емкостью C_0?*

Эта задача аналогична предыдущей, и ответ, по-видимому, тоже аналогичен предыдущему:

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Проверим это, проведя подробное решение.

В первом акте происходит «расселение» исходного заряда по двум параллельно соединенным конденсаторам. При этом заряд сохраняется, поэтому можно записать

$$CU = (C + C_0)U_1.$$

Во втором акте «расселению» подвергается заряд CU_1:

$$CU_1 = (C + C_0)U_2,$$

и так далее. Наконец, n-й акт описывается соотношением

$$CU_{n-1} = (C + C_0)U_n.$$

Перемножив соответствующим образом эти равенства друг на друга, получим

$$C^nU = (C + C_0)^nU_n,$$

или (после простых преобразований)

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Таким образом, сравнивая эти две задачи, можно заключить, что похожие процессы, хотя и имеют различную физическую природу, описываются сходной математикой и имеют ответы на аналогичные вопросы в виде совпадающих математических конструкций. Более того, аналогичными оказываются отношения p/p_n и U/U_n, а также V_0/V и C_0/C.

Задача 3. *Тонкий обруч массой m и радиусом R вращается равномерно вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, с частотой n. Найдите величину силы натяжения, возникающей в обруче.*

При раскручивании обруча до частоты n он слегка деформируется (увеличивается его длина), и возникает сила натяжения. На рисунке 1 выделен малый участок кольца, на концы которого действуют две силы натяжения, величиной T каждая. Длина участка равна $R \cdot 2\Delta\alpha$. При достаточно малом угле $\Delta\alpha$ участок можно считать материальной точкой массой $m(R \cdot 2\Delta\alpha)/(2\pi R)$, движущейся по окружности с линейной скоростью $2\pi Rn$ и центростремительным ускорением $a = (2\pi Rn)^2/R$ под действием радиальных составляю-

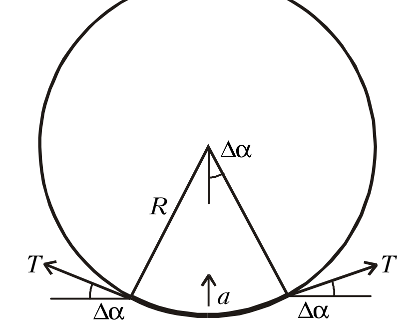

Рис. 1