$= \cos \pi n$ позволяет и здесь найти простую формулу: $a(x) = \cos \pi x$.

А для внешне простой последовательности $a_n = n!$ один из «лучших» непрерывных двойников выглядит так:

$$a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt.$$

Эта функция, носящая имя Эйлера, играет особую роль в математике.

В этой статье мы разберем несколько примеров, демонстрирующих пользу, которую приносит переход от изучения последовательности к изучению непрерывной функции.

Производная помогает изучать последовательность

Построение непрерывного двойника с «точным» свойством $a(n) = a_n$ является естественным, например, при решении задачи о нахождении наибольшего или наименьшего члена последовательности.

Пример 1. Найдите наибольший член последовательности $a_n = \dfrac{n-1}{n^2 - n + 7}$.

Решение. Рассмотрим функцию $a(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 7}$, $x > 0$. Найдя производную $a'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 6}{\left(x^2 - x + 7\right)^2}$, мы видим, что функция возрастает при $0 < x < 1 + \sqrt{7}$, убывает при $x > 1 + \sqrt{7}$ и имеет в точке $x_0 = 1 + \sqrt{7}$ локальный максимум (рис.1).

Так как $1 + \sqrt{7} \approx 3{,}6$, то для определения наибольшего члена последовательности надо сравнить два числа: $a(3)$ и $a(4)$. Поскольку $a(3) = \dfrac{2}{13} < a(4) = \dfrac{3}{19}$, наибольшим членом последовательности является $a_4 = \dfrac{3}{19}$.

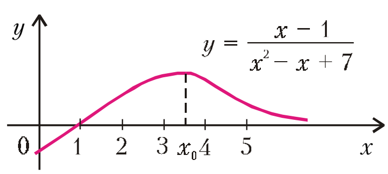

Рис. 1

Ответ. $a_4 = \dfrac{3}{19}$.

Задачи типа разобранной часто являются составной частью задач, в которых надо оптимально выбрать дискретно меняющийся параметр. В качестве примера предлагаем решить задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в МФТИ в 1992 году.

Упражнение 1. На берегу реки шириной $8l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $П_0$, $П_1$, … …, $П_{100}$. От $П_0$ до $П_{100}$ со скоростью $6v$ и с остановками только в пунктах $П_0$, …, $П_{100}$ идут автобусы, которые отправляются из $П_0$ один за другим с интервалом времени $\dfrac{l}{10v}$. Турист, находящийся на противоположном берегу реки напротив $П_0$, отплывает в лодке одновременно с отправлением из $П_0$ очередного автобуса. Доплыв по прямой до одного из пунктов, турист добирается до $П_{100}$ на автобусе. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v. В какой пункт должен плыть турист, чтобы затратить на весь путь до $П_{100}$ наименьшее время? Найдите все решения. (Временем стоянки автобусов можно пренебречь.)

Интеграл вместо суммы

Известно, что при каждом натуральном k сумма

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

может быть представлена как многочлен от n степени $k + 1$ (см. [1], [2]).

Читатель, видимо, знаком с формулами, позволяющими вычислять $S_k(n)$ при небольших значениях k:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— это частный случай формулы суммы для первых n членов арифметической прогрессии;

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Приведенные формулы легко доказываются методом математической индукции, но такой подход оставляет невыясненным то, как появились эти формулы.

В этом разделе мы разберем доказательство общего утверждения, которое будет конструктивным и позволит находить коэффициенты многочлена $S_k(n)$ для любого заданного значения k.

Основную идею хорошо видно на примере вычисления $S_1(n)$. На рисунке 2 изображены прямоугольники, сумма площадей которых равна $1 + 2 + \ldots$ $\ldots + n = S_1(n)$.

Очевидно, что площадь трапеции, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = x + \dfrac{1}{2}$, $x = n - 1$ и $x = n$, равна площади прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[n-1; n]$, а высота равна n, т.е.

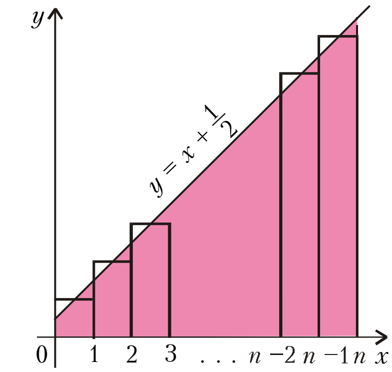

Рис. 2

$$\int_{n-1}^{n} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = n$$

при любом натуральном n.

Следовательно,

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{m=1}^{n} \int_{m-1}^{m} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^n \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Если аналогичным образом нам удастся для каждого значения k найти многочлен $P_k(x)$ степени k такой, что равенство

$$\int_{n-1}^{n} P_k(x) dx = n^k$$

справедливо при каждом натуральном n, то будет решена и задача о представлении $S_k(n)$ в виде многочлена от n степени $k + 1$: тогда

$$S_k(n) = \int_0^n P_k(x) dx.$$

Покажем, что такой многочлен $P_k(x)$ существует и определен единственным образом. Пусть

$$P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Условие

$$n^k = \int_{m-1}^{n} P_k(x) dx = \frac{a_0}{k+1}\left(n^{k+1} - (n-1)^{k+1}\right) + \frac{a_1}{k}\left(n^k - (n-1)^k\right) + \ldots + a_k$$

выполняется при всех натуральных n