Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач, по 5 задач в номерах 4—6 этого года и в №1 за 1999 год. Решения задач высылайте в течение месяца после получения номера журнала «Квант», в котором опубликованы условия задач, по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала.

11. Найдите наименьшее делящееся на 99 натуральное число, все цифры которого четны.

С.Волченков

12. В троллейбусе едут 175 пассажиров и два кондуктора. Каждый пассажир покупает билет только после того, как его три раза об этом попросят. Сначала первый кондуктор просит приобрести билет одного из безбилетных пассажиров, потом то же самое делает второй кондуктор, и так далее до тех пор, пока все пассажиры не купят билеты. Продажу какого наибольшего количества билетов может обеспечить себе первый кондуктор?

Ф.Назаров

13. Конь сделал 8 ходов и вернулся последним ходом на исходное поле. Мог ли он при этом побывать на всех вертикалях и горизонталях шахматной доски?

А.Спивак

14. На стороне AC треугольника ABC находится точка B_1. На сторонах AB и BC постройте соответственно точки C_1 и A_1 так, чтобы площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C были равны.

В.Произволов

15. По окружности, разбитой на несколько дуг, прыгает блоха. Перед каждым своим прыжком она вычисляет длину дуги, на которой находится, а затем прыгает так, чтобы сместиться по часовой стрелке на дугу вычисленной длины. В частности, если блоха попала на границу двух дуг, то она дальше прыгает по часовой стрелке по граничным точкам, и тем самым посещает все дуги. Докажите, что в любом случае блоха побывает на всех дугах.

А.Шаповалов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Метаморфозы последовательностей

С.КОНОВАЛОВ

Если Холмс и Ватсон, пробираясь через Гримпенскую трясину, прыгают по кочкам, то такая «дискретизация» их пути вполне объяснима. Но когда идущие по гладкому аэродромному полю, замощенному бетонными плитами, стараются наступать (или не наступать) на линии стыковки этих плит, то объяснить это рационально значительно сложнее (в некоторых странах нежелание наступить на линию и стремление избежать встречи с черной кошкой – явления одного ряда).

Аналогичным магическим воздействием обладают последовательности, т.е. функции натурального аргумента: возникает желание изучать эту функцию, «прыгая» от точки к точке и не замечая, что вокруг — числовая прямая, по которой можно «ходить»! Но для изучения функций, определенных только на множестве натуральных чисел, у нас нет мощных инструментов в виде теорем дифференциального и интегрального исчисления, поэтому непосредственное изучение последовательностей (конечных или бесконечных) часто становится весьма трудным делом.

С другой стороны, если для данной последовательности a_n ($n = 1, 2, \ldots$) мы подберем функцию $a(x)$, определенную при всех $x > 0$ и такую, что $a(n) = a_n$ для каждого натурального n, то изучив функцию $a(x)$ «целиком», мы узнаем и то, как она ведет себя в целочисленных точках. Конечно, чтобы для анализа свойств функции $a(x)$ можно было применять соответствующие теоремы, она должна быть достаточно «хорошей», например, непрерывной или имеющей производную в каждой точке.

Подобрать функцию, определяемую не очень сложной формулой, не всегда легко, хотя непрерывных линий, проходящих через точки $(n; a_n)$ на координатной плоскости, бесконечно много.

В простейших случаях достаточно заменить n на x: например, последовательности $a_n = \sqrt{n^2+1}$ соответствует функция $a(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Для последовательности $a_n = (-1)^n$ подобная замена невозможна, но предварительное преобразование $(-1)^n =$