лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю m всех жителей составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

Пусть x – доля правдивых жителей. Рассмотрим другой круг, в котором все лжецы станут правдивыми, а все правдивые – лжецами; в нем доля правдивых равна $1 - x$. В этом круге путешественник услышит в точности то же, что и в первом круге, поскольку правдивость каждого жителя изменилась, но изменилась и правдивость соседа, о котором он говорит. Поскольку путешественник сумел на основании полученных ответов определить долю правдивых жителей, эта доля в обоих случаях одинакова. Следовательно, она равна $1/2$.

Побочное следствие: число жителей было четным.

Б.Френкин

М1640. *Четырехугольник ABCD обладает тем свойством, что внутри него существует точка M, для которой AMB и CMD – равнобедренные треугольники с углом 120° при вершине M. Докажите, что тогда существует точка N, для которой BNC и DNA – равносторонние треугольники.*

Треугольники AMC и BMD равны по двум сторонам и углу между ними (рис.1). Значит, диагонали AC и BD равны и угол между ними 60°.

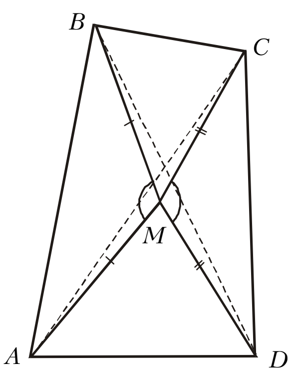

Рис.1

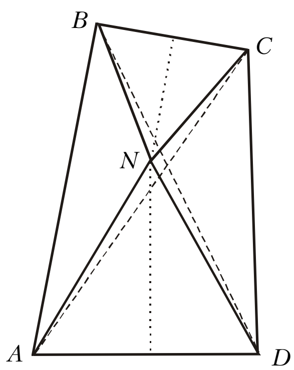

Рис.2

Теперь проведем серединные перпендикуляры к сторонам AD и BC, точка их пересечения и будет искомой точкой N (рис.2). В самом деле, треугольники ANC и DNB равны (по трем сторонам) и получаются один из другого поворотом на 60° около точки N. Значит, $\angle BNC = \angle AND = 60°$ и равнобедренные треугольники AND и BNC – равносторонние.

И.Шарыгин

М1642.[1] *Некоторые стороны клеток шахматной доски 8×8 являются перегородками. Расстановка перегородок называется хорошей, если доска остается связной (ладья может пройти с любого поля на любое другое, минуя перегородки), и плохой – в противном случае. Каких расстановок больше – хороших или плохих?*

Всего мест для потенциальных перегородок 112. На любом из них может быть поставлена или не поставлена перегородка, так что расстановок – хороших и плохих – всего 2^{112}. Поставим две перегородки, ограничивающие угловое поле a1. Расстановок с этими перегородками 2^{110} – четверть от общего количества. Среди оставшихся трех четвертей всех расстановок четверть составляют те, у которых отрезано угловое поле h1. Плохие расстановки этих двух типов составляют в сумме $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$ от общего числа. Четверть оставшихся расстановок составляют те, у которых отрезано поле a8, и плохих расстановок уже больше половины:

$$\frac{7}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{37}{64} > \frac{1}{2}.$$

А.Шаповалов

М1643. *а) Существуют ли целые числа a и b ($a \neq 0$) такие, что последовательность $c_n = an! + b$ состоит только из квадратов?*

б) Существуют ли целые числа a, b, c ($ab \neq 0$) такие, что для каждого n существует целое x, для которого $ax^2 + bx + c = n!$?

а) Нет, не существуют.

Предположим, что числа a и b существуют. Докажем, что $b \neq 0$.

В самом деле, если $b = 0$, то для *любого* простого p существуют такие натуральные x и y, что

$$a \cdot (p-1)! = x^2,$$

$$a \cdot p! = y^2.$$

Но тогда

$$px^2 - y^2 = 0,$$

откуда следует, что y делится на p, при этом и x делится на p, т.е. a делится на p. Итак, a должно делиться на все без исключения простые числа, что невозможно.

Если $b \neq 0$, то при любом натуральном n существуют натуральные x и y, для которых

$$a \cdot \left(n^2 - 1\right)! = x^2 - b,$$

$$a \cdot \left(n^2\right)! = y^2 - b.$$

Умножая первое равенство на n^2 и вычитая из него второе равенство, получаем

$$n^2x^2 - y^2 = \left(n^2 - 1\right)b.$$

Тогда

$$\left(n^2 - 1\right)|b| = |nx - y| \cdot |nx + y| \geq y,$$

но

$$y = a \cdot \left(n^2\right)! + b \geq an^2\left(n^2 - 1\right) + b,$$

откуда

$$\left(n^2 - 1\right)|b| \geq an^2\left(n^2 - 1\right) + b.$$

Последнее неравенство не выполняется при больших n, поскольку слева многочлен второй степени, а справа – четвертой.

б) Не существуют. Иначе дискриминант квадратного уравнения при всяком n являлся бы полным квадратом вопреки а).

А.Егоров

[1] *Решение задачи М1641 будет опубликовано в одном из следующих номеров журнала.*