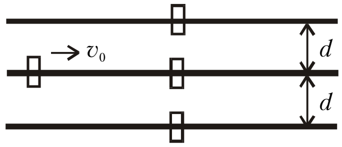

Рис.2

Ф1671. Три параллельных тонких непроводящих стержня находятся в горизонтальной плоскости; расстояние между соседними стержнями d (рис.2). На стержни насажены тяжелые шайбы массой M каждая, заряженные одинаковыми зарядами Q. В начальный момент три из них неподвижны и находятся на прямой, перпендикулярной стержням, а четвертая движется издали по среднему стержню со скоростью v_0. Найдите скорости шайб через большой промежуток времени. Трения нет.

Р.Сашин

Ф1672. Тяжелый проводящий брусок массой M = 1 кг лежит на горизонтально расположенных рельсах перпендикулярно им (рис.3). Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна B = 0,1 Тл. Заряженный до напряжения U = 100 В конденсатор емкостью C = 10 мкФ подключают к рельсам. Считая сопротивление цепи R = 1 кОм достаточно большим, определите установившуюся скорость движения бруска. Расстояние между рельсами d = 1 м. Брусок движется поступательно.

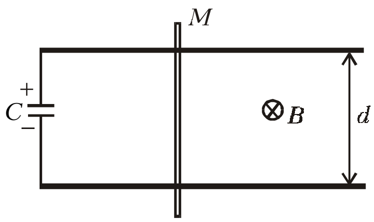

Рис.3

М.Учителев

Решения задач М1636—М1645, Ф1653—Ф1657

М1636. *Вокруг трапеции нельзя описать окружность. Докажите, что трапеция, образованная серединными перпендикулярами к ее сторонам, подобна исходной.*

Сначала определимся с тем, что есть что (рис.1): KL, MN – средние линии трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно, R – середина KL и PQ, S – середина EF, T – середина AB.

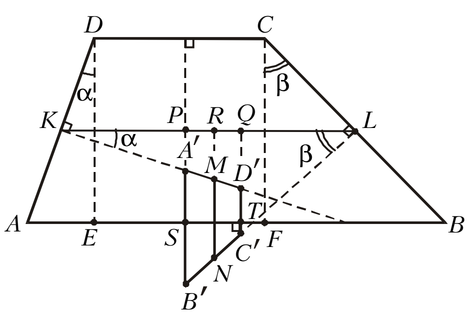

Рис.1

Соответствующие углы трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны ($\angle A' = 180° - \angle D = \angle A$ и т.д.), поэтому достаточно доказать, например, что

$$\frac{(AB + CD)/2}{H} = \frac{(A'B' + C'D')/2}{h},$$

где H и h – высоты трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно.

Имеем $MN = NR - MR = RL\operatorname{tg}\beta - RK\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB + CD}{4}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$, так как $KR = RL$. Теперь осталось доказать, что $2h = H(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$.

Имеем $H\operatorname{tg}\beta - H\operatorname{tg}\alpha = FB - EA = (BT - TF) - (AT - TE) = TE - TF = (ES + ST) - (SF - ST) = 2ST = 2h$; так как $ES = SF$, то $2h = H(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$.

Доказательство завершено.

В.Кириченко

М1637. *Квадрат со стороной 1 разрезали на k прямоугольников. Докажите, что сумма длин k наименьших сторон всех прямоугольников не менее 1.*

Две стороны исходного квадрата будем считать горизонтальными, а две другие – вертикальными. В соответствии с условием задачи, у каждого прямоугольника отмечена одна сторона – либо горизонтальная, либо вертикальная. Если всякая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, пересекает хотя бы одну отмеченную сторону какого-либо прямоугольника, то ясно, что сумма длин отмеченных сторон не меньше длин сторон квадрата, т.е. не меньше 1.

Если же найдется горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, но не пересекающая ни одну из отмеченных сторон, то у всех прямоугольников, которые она пересекает, отмеченными окажутся горизонтальные стороны. Ввиду этого, всякая вертикальная прямая, пересекающая квадрат, пересекает хотя бы одну из отмеченных сторон, т.е. сумма их длин не меньше 1.

В.Произволов

М1638. *Красный квадрат площадью 1 покрывают более 100 белых квадратов, площадь каждого из которых равна 1. При этом стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один белый квадрат так, что остальные все еще будут покрывать целиком красный квадрат?*

Покажем, что не всегда. Для этого построим специальное покрытие красного квадрата N белыми квадратами ($N > 100$). Диагональ AC красного квадрата $ABCD$ разобьем на N равных отрезков, концы которых последовательно обозначим числами 1, 2, …, $N + 1$ (точка A обозначена числом 1, а точка C – числом $N + 1$). Заметим, что для каждой пары точек K и $K + 1$ ($(1 \le K \le N)$) существуют ровно два квадрата заданного размера, стороны которых параллельны сторонам красного квадрата и проходят через точки K и $K + 1$, причем один из этих квадратов содержит вершину B и не содержит D, а другой, наоборот, содержит D и не содержит B. Если K нечетно, то в качестве белого возьмем тот квадрат, который содержит вершину B, а если K четно, то тот квадрат, который содержит D. Выбранные таким образом N белых квадратов покрывают целиком красный квадрат, но если удалить любой из них, то часть красного квадрата окажется непокрытой. В самом деле, если удалить белый квадрат, стороны которого проходят через точки K и $K + 1$, то отрезок диагонали с концами K и $K + 1$ покрыт не будет.

С.Агеев, В.Произволов

М1639. *Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда*