Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Не стреляйте в белых лебедей» предназначена девятиклассникам, заметка «Хаос молекул и звезд» — десятиклассникам, «Зачем быть конденсатору в магнитном поле?» – одиннадцатиклассникам.

Не стреляйте в белых лебедей

А.СТАСЕНКО

ИЗВЕСТНО, что на тело, движущееся в воздухе, действует сила сопротивления $\vec{F}$. Почти очевидно, что эта сила зависит от скорости движения $\vec{v}$ и размеров тела, например площади поперечного сечения S, причем эта зависимость типа «чем больше v и S, тем больше F». Можно еще уточнить вид этой зависимости, исходя из соображений размерностей (единиц измерения). Действительно, сила измеряется в ньютонах ($[F]$ = Н), а Н = кг $\cdot$ м/с^2. Видно, что секунда в квадрате входит в знаменатель. Отсюда сразу ясно, что сила должна быть пропорциональна квадрату скорости тела ($\left[v^2\right]$ = м^2/с^2) и плотности ($[\rho]$ = кг/м^3) – конечно, той среды, в которой движется тело. Итак,

$$F \sim \rho S v^2 .$$

А чтобы подчеркнуть, что эта сила направлена против вектора скорости, можно записать так:

$$\vec{F} \sim -\rho S v \vec{v} .$$

Мы узнали уже очень много, но это еще не все. Наверняка сила сопротивления (аэродинамическая сила) зависит и от формы тела – не случайно ведь летательные аппараты делаются «хорошо обтекаемыми». Чтобы учесть и эту предполагаемую зависимость, можно в полученное выше соотношение (пропорциональность) ввести безразмерный множитель, который не нарушит равенства размерностей в обеих частях этого соотношения, но превратит его в равенство:

$$\vec{F} = -\alpha \rho S v \vec{v} .$$

Представим себе шарик, движущийся в воздухе, – например дробинку, горизонтально вылетевшую с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Если бы не было сопротивления воздуха (в школьных задачах обычно так и говорится: «сопротивлением воздуха пренебречь»), то на расстоянии x за время $t_0 = x/v_0$ дробинка сместилась бы по вертикали вниз на

$$y_0 = \frac{g t_0^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 . \qquad (1)$$

Соответствующая кривая (парабола) изображена на рисунке 1 штриховой линией (заметим, что ось Y направлена вниз). Но из-за действия силы сопротивления (направленной против вектора скорости) время полета дробинки до вертикальной плоскости x будет больше t_0. Следовательно, сила тяжести $m\vec{g}$ дольше будет действовать на дробинку, так что она опустится ниже y_0.

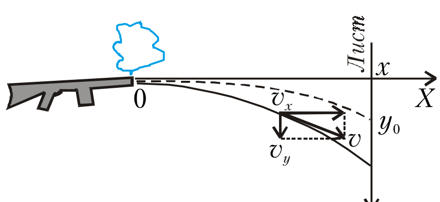

Рис. 1

И вообще, дробинка будет двигаться по другой кривой (сплошная линия на рисунке 1), уже не являющейся параболой (ее называют *баллистической траекторией*).

И тут наше успешное продвижение в познании силы сопротивления резко замедляется. Соображения размерности уже бесполезны: ведь α – безразмерный множитель. Чтобы узнать его для тела конкретной формы, нужны либо численные решения уравнений газодинамики (описывающих движение воздуха вокруг этого тела), либо экспериментальные исследования (есть наука, которая так и называется: *экспериментальная аэрогазодинамика*).

Что можно сказать об этой кривой? Если были бы известны начальная скорость дробинки v_0 и коэффициент α в силе сопротивления, то нужно было бы написать уравнение второго закона Ньютона и решить его. Это – дело математики, но кто даст математикам эти величины? Попробуем справиться сами.

Примем такой план действий:

1) Постараемся как можно подробнее (при наших скромных математических знаниях) описать движение дробинки для любых значений α и v_0.

2) Экспериментально измерим вертикальные смещения дробинки, например, при помощи вертикального листа бумаги, помещенного на известном расстоянии x от ружья.

3) Сравнивая теорию и эксперимент, *получим* α и v_0.

Итак, прежде всего запишем уравнение движения дробинки под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и силы сопротивления воздуха $\vec{F}$, определенной выше:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha \rho S v \vec{v} .$$

Разделим обе части этого уравнения на массу дробинки m. Очевидно, что тогда последнее слагаемое будет обратно пропорционально радиусу дробинки: действительно, площадь поперечного сечения шарика пропорциональна квадрату радиуса, а объем (и, значит, масса) – кубу радиуса. Если считать, что α не зависит от размеров шарика, то эту величину и плотность воздуха можно «спрятать» в новую постоянную β, так что получим

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{\beta}{r} v \vec{v} . \qquad (2)$$

Заметим, что в отсутствие сопротивления (когда α и β равны нулю) траектории всех дробинок одинаковы и все они попадут в точку y_0. А вот сопротивление воздуха как раз и позволяет «рассортировать» их по размерам. (Это же «сортирующее свойство» используется в сельском хозяйстве, на току, когда боковой ветер отделяет легкую шелуху от полновесных зерен.) Из уравнения (2) видно, что чем меньше дробинка, тем сильнее влияет на ее движение воздух (радиус входит в знаменатель). И наоборот, чем массивнее тело, тем с большей точностью можно пренебречь сопротивлением, так что останется только сила тяжести ($\vec{a}_0 = \vec{g}$). Только в этом предельном случае и верен вывод из экспериментов Галилея, бросавшего пушечные ядра и мушкетные пули с башни: «скорость падающих тел одинакова, независимо от их веса». Но мы здесь как раз и хотим использовать «сортирующее свойство» силы сопротивления воздуха. Поэтому подробнее исследуем уравнение (2).

Модуль скорости связан с горизонтальной и вертикальной составляющими соотношением $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. И тут сделаем первое упрощающее предположение. Интуитивно ясно, что вначале скорость вертикального падения дробинки много меньше скорости горизонтального движения (если не очень удаляться от ружья), а уж их квадраты и подавно сильно отличаются друг от друга. Значит, можно приближенно считать, что $v \simeq v_x$.

Теперь сделаем второе упрощающее предположение. Будем считать, что сила сопротивления воздуха при вертикальном перемещении дробинки мала по сравнению с силой тяжести (в начальный момент времени она вообще равна нулю). Можно короче сформулировать это предположение так: будем считать, что дробинка перемещается в горизонтальном направлении с большой скоростью и заметно тормозится при этом (ведь сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости), а в вертикальном направлении она перемещается как свободно падающее (без сопротивления) тело по тому же закону (1):

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{x\,\text{ср}}}\right)^2, \qquad (3)$$

в который, однако, входит средняя горизонтальная скорость $v_{x\,\text{ср}}$ на отрезке $0x$.

В этих предположениях уравнение (2) для горизонтального и вертикального движений примет вид

$$a_x = -\frac{\beta}{r} v_x^2, \; a_y = g. \qquad (4)$$

Решение второго уравнения уже найдено: это равноускоренное падение (3). Рассмотрим первое уравнение. Ускорение равно отношению изменения скорости Δv_x ко времени Δt, которое, в свою очередь, можно выразить через скорость v_x, а именно: $\Delta t = \Delta x / v_x$. Итак,

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x},$$

и тогда первое уравнение можно сократить на v_x и получить

$$\Delta v_x = -\frac{\beta}{r} v_x \Delta x. \qquad (5)$$

Это так называемое *релаксационное уравнение*: изменение искомой величины (в данном случае – горизонтальной составляющей скорости) пропорционально самой величине. И решение этого уравнения известно – это *экспонента.* Но чтобы не пугать себя словами, посмотрим на рисунок 2 и заметим, что на начальном участке изменение величины v_x очень похоже на прямую

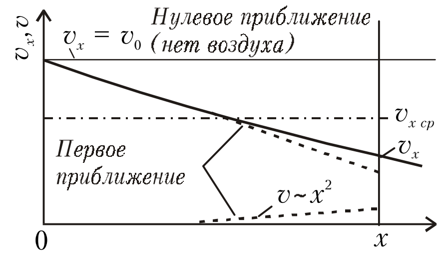

Рис. 2

(пунктир). Попробуем оценить изменение горизонтальной скорости, не решая уравнение (5) точно. Когда физики не могут (или не хотят) решать точно, они применяют *метод последовательных приближений.* Он «работает» так.

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то решение известно: $v_x = v_0$ – горизонтальная составляющая скорости не изменяется. Подставим это так называемое нулевое приближение в уравнение (5):

$$\Delta v_x \approx -\frac{\beta}{r} v_0 \Delta x$$

и получим уравнение для первого приближения. Видно, что в этом приближении скорость линейно уменьшается со временем:

$$v_x = v_0\left(1 - \frac{\beta}{r} x\right). \qquad (6)$$

Это и есть пунктирная прямая на рисунке 2. Средняя скорость на участке $0x$ в этом приближении равна (штрихпунктир на рисунке)

$$v_{x\,\text{ср}} = v_0\left(1 - \frac{\beta}{2r} x\right).$$

Подставив это значение в (3), найдем уравнение баллистической кривой в первом приближении:

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2} \frac{1}{1 - \dfrac{\beta}{2r} x}.$$

Предположим, что из ружья вылетели две дробинки радиусами r_1 и r_2, которые пробили вертикальный лист бумаги, расположенный на расстоянии $x = l$, в точках y_1 и y_2. Тогда из последнего соотношения получим два уравнения с двумя неизвестными, из которых найдем и начальную скорость вылета, и коэффициент сопротивления дробинок:

$$v_0 = l\sqrt{\frac{g}{2y_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{r_1\left(1/r_2 - \sqrt{y_1/y_2}/r_1\right)}}},$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{\dfrac{l}{2}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{\sqrt{y_1/y_2}}{r_1}\right)}.$$

Можно ограничиться этим приближением, а можно пойти дальше. Подставив первое приближение (6) в правую часть уравнения (5), найдем второе приближение для скорости, и так далее. Все эти приближения *сойдутся* (как говорят математики) к точному решению для баллистической кривой:

$$y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \left(\frac{r}{2\beta x} e^{2\beta x/r} - \frac{1}{x}\right),$$

где первый сомножитель есть $y_0(x)$ (см. (1)).

И тут пора начать сомневаться. Ведь даже если эти две дробинки выталкиваются одним пыжом – все равно они могут приобрести какие-то начальные вертикальные скорости. А если взять не две дробинки, а много дробинок двух сортов (с теми же радиусами r_1 и r_2), то они в процессе движения могут сталкиваться друг с другом или взаимодействовать через те возмущения, которые они производят в воздухе. И сами дробинки могут быть не строго шаровыми, что приведет к появлению «подъемной» силы (вверх или вниз) или боковых сил, или к вращению дробинок, или... И тогда мы получим на листе бумаги разброс точек, качественно показанный на рисунке 3, в

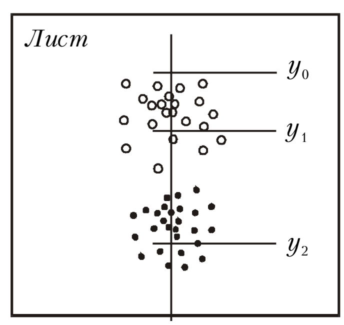

Рис. 3

котором y_1 и y_2 – это «центры тяжести» точек попадания частиц двух сортов. И, значит, траектория дробинки приобретет вероятностный смысл, а в обработке эксперимента придется использовать теорию ошибок. И тогда ...

Но это уже предмет будущих исследований наших читателей.