Неожиданная поворотная гомотетия

А.СПИРОВ

Я считаю формальную строгость обязательной и думаю, что в конечном счете после большой (и обычно полезной для окончательного понимания) работы она может быть соединена (при изложении важных, т.е. по сути простых результатов) с полной простотой и естественностью. Единственное средство добиться осуществления этого — требовать логической отчетливости даже там, где она пока обременительна.

А.Н.Колмогоров

В статье «Покрытия полосками» авторы пользовались тем, что все вершины наибольшего квадрата, который можно расположить в данном треугольнике ABC, должны лежать на сторонах этого треугольника. Но так ли уж это очевидно?

Задумавшись над этим вопросом, мы вспомнили такую задачу:

Задача 1. *Впишите в треугольник ABC наибольший возможный треугольник, подобный данному треугольнику XYZ (рис. 1).*

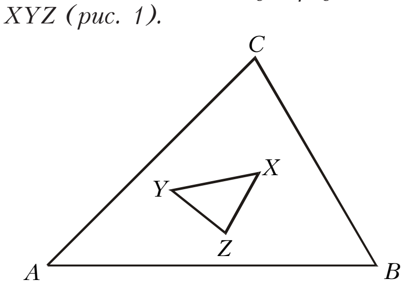

Рис. 1

Ответ в этой задаче вполне бесхитростный: одна из сторон наибольшего вписанного треугольника должна лечь на сторону треугольника ABC.

Намного интереснее решение. Оказывается, существует семейство вписанных в треугольник ABC треугольников, получающихся один из другого поворотной гомотетией. Об этом красивом и удивительном явлении, а также о некоторых свойствах вписанных друг в друга многоугольников рассказано ниже.

Как вписать в треугольник квадрат?

Начнем с классической задачи:

Задача 2. *Впишите в данный треугольник ABC квадрат, две вершины которого лежат на AB, а две другие — на двух других сторонах (рис. 2).*

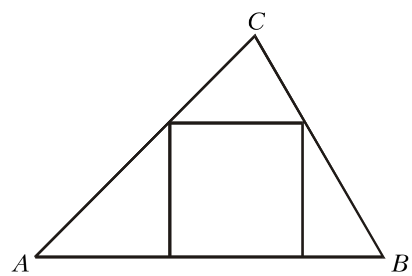

Рис. 2

Американский математик Пойа в книге «Как решать задачу?» изложил решение этой задачи в форме диалога учителя с учеником:

Учитель: — *Что неизвестно?*

Ученик: — Квадрат.

— *Что дано?*

— Только треугольник, больше ничего.

— *Что надо сделать?*

— Четыре вершины квадрата должны лежать на сторонах треугольника: две из них — на основании и по одной — на боковых сторонах.

— *Бывает ли такое?*

— Конечно, да.

— *Для всякого ли треугольника ABC такой квадрат можно построить?*

— Нет. Например, угол A может быть тупым (рис. 3).

— *А если углы A и B оба нетупые, квадрат обязательно существует?*

— Наверно. Хотя точно я не знаю.

— *Нельзя ли решить более простую задачу? Например, для прямого угла A?*

— Конечно, это очень легко: вершина квадрата будет на биссектрисе угла A. Но я не понимаю, как это обобщить: не проводить же мне биссектрису этого угла в общем случае! От нее никакой пользы нет!

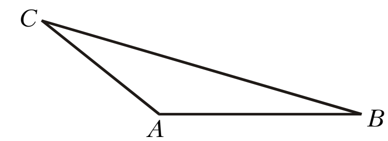

Рис. 3

— *Если задача не получается, попытайтесь удовлетворить не все сразу, а только некоторые ее требования.*

— Я могу нарисовать квадрат, две вершины которого лежат на AB.

— *Сколько таких квадратов?*

— Бесконечно много. Среди них есть совсем маленькие, есть побольше. Мне кажется, если взять такой маленький квадратик и начать его потихоньку увеличивать, то он упрется в стороны треугольника. Может быть, искомый квадрат — это самый большой из квадратов с основаниями на AB, помещающийся в треугольнике?

— *Вы правы, но пока не знаете, как это доказывается. Не будем слишком увлекаться. Напоминаю: требовалось построить квадрат циркулем и линейкой! Лучше подумайте, нельзя ли сделать чуть больше, чем Вы только что сделали? Как построить квадрат с тремя вершинами на сторонах треугольника?*

— Иными словами, как нарисовать квадрат в момент, когда он одной своей вершиной уперся в AC?

— *Да.*

— Я могу взять точку K на луче AC и опустить перпендикуляр KL на AB (рис.4). Квадрат $KLMN$ по известной стороне KL строится.

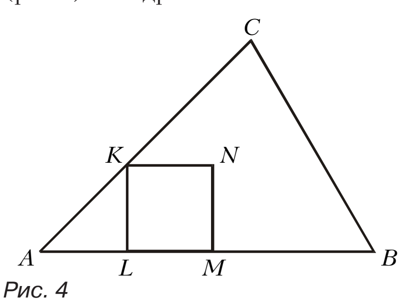

Рис. 4

— *Таких квадратов можно построить много. Иначе говоря, квадрат не определен однозначно той частью условий, которую мы сохранили. Как он может меняться?*

— Не знаю.

— *Три вершины квадрата лежат на сторонах треугольника, а четвертая* *вершина пока не там, где она должна быть. Квадрат может меняться; его четвертая вершина может перемещаться. Как она может перемещаться?*

— Все равно не понял.

— *Поэкспериментируйте. Постройте еще несколько таких квадратов. Начертите маленькие и большие квадраты. Где может находиться четвертая вершина квадрата, если две его вершины лежат на одной стороне данного острого угла, а третья — на другой? Иными словами, как перемещается четвертая вершина, когда квадрат меняется?*

Пойа уверен, что после такой обстоятельной подсказки ученик обязательно нарисует что-то вроде рисунка 5 и смекнет, что вершина N' искомого квадрата — это точка пересечения луча AN с отрезком BC (рис. 6).

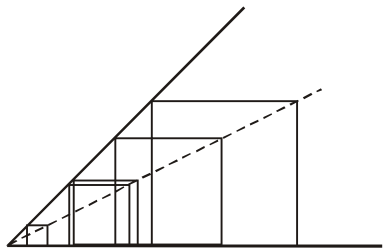

Рис. 5

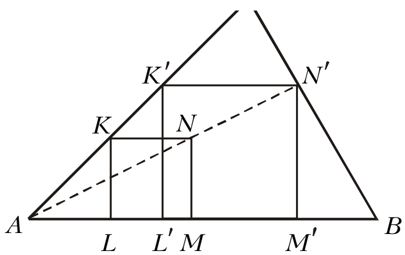

Рис. 6

Как вписать треугольник, гомотетичный данному?

Теперь мы легко справимся со следующей задачей:

Задача 3. *Разместите в данном треугольнике ABC наибольший возможный треугольник $X'Y'Z'$, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника XYZ.*

Решение. Параллельным переносом можно свести задачу к случаю, когда вершина X лежит на стороне треугольника ABC (рис.7). «Раздутием» (точнее говоря, гомотетией) с центром X получим треугольник XY_1Z_1, две вершины которого лежат на сторонах ΔABC. Осталось применить гомотетию с центром C — и мы получим треугольник $X'Y'Z'$, все вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC.

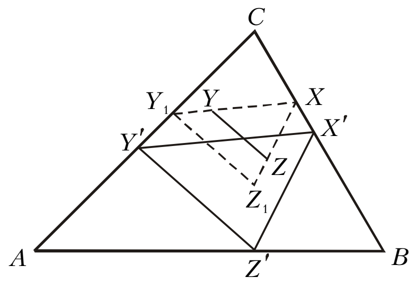

Рис. 7

«Очевидно», что треугольник $X'Y'Z'$ — наибольший возможный. Столь же «очевидно», что он гомотетичен или равен треугольнику XYZ.

Если задуматься над доказательствами последних двух утверждений, то станет ясно, что лучше было рассуждать не так, как это делали мы, а следующим образом.

Проведем через вершины треугольника XYZ прямые параллельно сторонам треугольника АВС (рис. 8). Треугольники ABC и $A'B'C'$ с параллельными сторонами подобны, а прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке S — центре гомотетии.

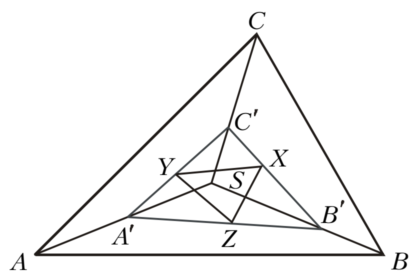

Рис. 8

Последнее утверждение становится очевидным, если мы приподнимем треугольник $A'B'C'$ над плоскостью чертежа. Получим в параллельной плоскости треугольник $A''B''C''$. Три плоскости боковых граней усеченной пирамиды, основаниями которой служат треугольники ABC и $A''B''C''$, пересекаются в одной точке (рис. 9). В этой точке пересекаются и продолжения боковых ребер AA'', BB'', CC'' пирамиды. Спроецировав пирамиду на исходную плоскость, получим, что упомянутые три прямые действительно пересекаются в одной точке S.

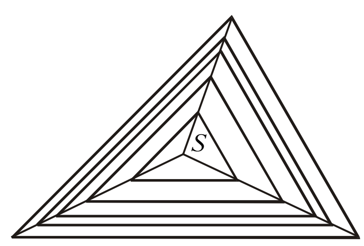

Рис. 9

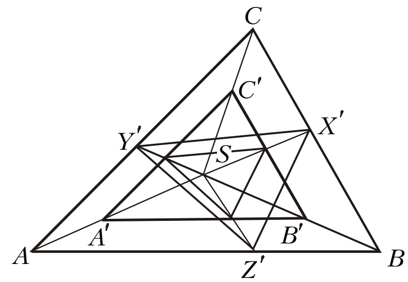

Рис. 10

Гомотетией с центром S из треугольника XYZ можно получить треугольник $X'Y'Z'$, вершины которого лежат на сторонах ΔABC (рис.10).

Упражнение 1. Докажите для любого треугольника неравенство $2r \le R$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

Указание. Рассмотрите окружность радиусом $R/2$, описанную вокруг треугольника, образованного средними линиями. Проведите касательные к ней, параллельные сторонам исходного треугольника.

Семейство вписанных подобных треугольников

Наше решение задачи 1 основано на том, что треугольник XYZ, вписанный в данный ΔABC, порождает семейство подобных вписанных треугольников. Для построения этого семейства нам потребуется один из красивейших геометрических фактов.

Задача 4. *Если точки X, Y и Z лежат, соответственно, на прямых BC, CA и AB, то описанные окружности треугольников AYZ, CXY и BZX пересекаются в одной точке.*

Решение. Рассмотрим точку M пересечения описанных окружностей треугольников AYZ и CXY (рис. 11). Поскольку сумма противоположных углов вписанного четырехугольника рав-

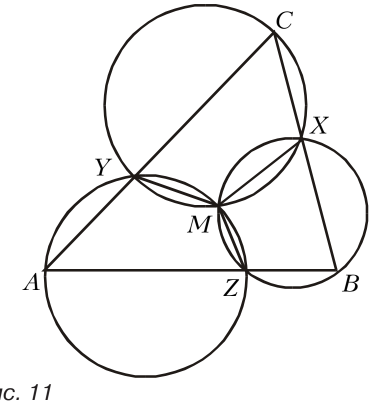

Рис. 11

на 180°, имеем:

$$\angle YMZ = 180^\circ - \angle A,$$

$$\angle YMX = 180^\circ - \angle C.$$

Следовательно,

$$\angle XMZ = 360^\circ - (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle C) = \angle A + \angle C,$$

так что сумма противоположных углов четырехугольника $BXMZ$ равна $\angle B + \angle A + \angle C = 180°$. Значит, вокруг четырехугольника $BXMZ$ и в самом деле можно описать окружность.

Замечание. На рисунке 12 показано расположение окружностей и точек,

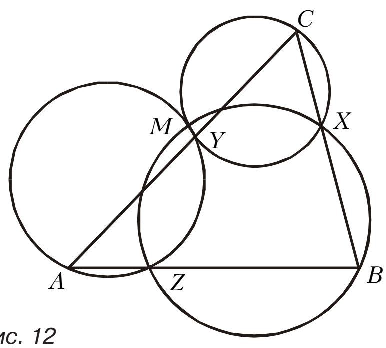

Рис. 12

отличное от разобранного нами. Для действительно полного решения задачи 4 следовало либо разобрать все возможные случаи, либо предложить решение, охватывающее все случаи сразу. Проделайте эту работу!

Мы готовы решать задачу 1. Рассмотрим ΔXYZ, вписанный в ΔABC. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников AZY, CXY и BZX. Повернем лучи MX, MY и MZ на некоторый угол и обозначим точки пересечения полученных лучей со сторонами треугольника ABC через X', Y' и Z' соответственно (рис. 13).

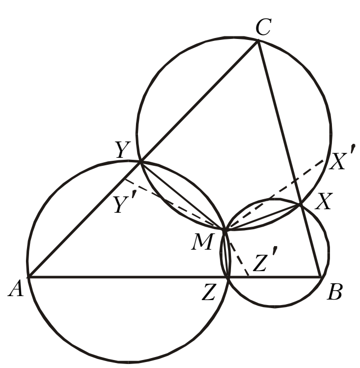

Рис. 13

По свойству вписанного четырехугольника,

$$\angle MMX' = 180^\circ - \angle MYC = \angle MYY'.$$

Аналогично можно доказать, что $\angle MYY' = \angle MZZ'$. Мы приходим к неожиданному выводу: треугольники MXX', MYY' и MZZ' подобны! Значит, $\Delta X'Y'Z'$ подобен ΔXYZ (и даже получается из него поворотной гомотетией с центром M).

Перемещая точку X' по отрезку BC, мы получим целое семейство вписанных в ΔABC треугольников. Размеры треугольника $X'Y'Z'$ тем больше, чем больше расстояние MX'. Поэтому размеры вписанного треугольника можно увеличивать до тех пор, пока одна из его вершин не упрется в вершину треугольника ABC.

Упражнение 2. Завершите решение задачи 1.

Наименьший вписанный треугольник

Решив задачу о наибольшем вписанном в ΔABC треугольнике, подобном данному треугольнику XYZ, спросим себя: как получить не наибольший, а *наименьший* треугольник?

Ответ очевиден: размеры треугольника $X'Y'Z'$ тем меньше, чем меньше длина отрезка MX'. Значит, в случае остроугольных треугольников (мы наложили это требование, чтобы основание опущенного из M перпендикуляра попало на саму сторону, а не на продолжение) наименьшим является треугольник с вершинами в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника ABC. (Такой треугольник называется *педальным* треугольником. О многих интересных свойствах педальных треугольников рассказано в книге Г.Коксетера и С.Грейтцера «Новые встречи с геометрией» — М.: Наука, 1978.)

Частный случай рассмотренной задачи был предложен десятиклассникам на московской олимпиаде 1998 года:

Задача 5. *На пол положили выпиленный из фанеры равносторонний треугольник ABC и вбили три гвоздя, по одному вплотную к каждой стороне треугольника. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении 1:3, считая от вершины A. Второй гвоздь делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B (рис. 14).*

В каком отношении делит сторону CA третий гвоздь, если треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола?

Прежде чем решать задачу, вообразите, что гвозди вбиты в середины сторон равностороннего треугольника ABC, и подумайте, почему треугольник «прибит» этими гвоздями. Подумали? Теперь можно заняться самой задачей.

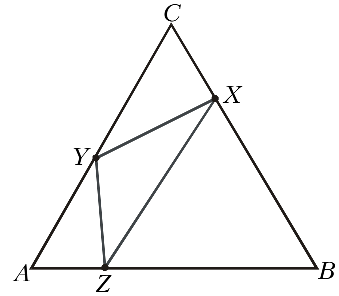

Рис. 14

Решение. *Первый способ*. Если бы ΔXYZ не был наименьшим из семейства вписанных в ΔABC подобных треугольников, то можно было бы уменьшать его размеры при помощи поворотной гомотетии из предыдущего раздела статьи. Значит, треугольник XYZ должен быть педальным треугольником, т.е. перпендикуляры, восставленные в точках X, Y и Z к сторонам треугольника ABC, должны пересекаться в одной точке S (рис.15).

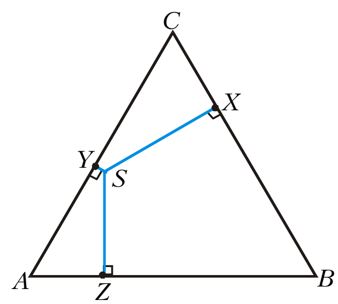

Рис. 15

Теперь легко найти ответ — вычислить, в каком отношении точка Y должна делить сторону AC.

Упражнение 3. Сделайте это, воспользовавшись равенством

$$\left(AZ^2 - ZB^2\right) + \left(BX^2 - XC^2\right) + \left(CY^2 - YA^2\right) = \left(AS^2 - SB^2\right) + \left(BS^2 - SC^2\right) + \left(CS^2 - SA^2\right) = 0.$$

Большинство участников олимпиады, разумеется, ничего не знало о педальных треугольниках. Они рассуждали следующим образом.

Второй способ. Если перпендикуляр, восставленный в точке Y к стороне AC, не проходит через точку пересечения перпендикуляров, восставленных в точках X и Z к сторонам BC и AB, то отметим внутри образованного перпендикулярами треугольника некоторую точку O (рис. 16). Поскольку углы OZB, OYA и OXC острые, гвозди не

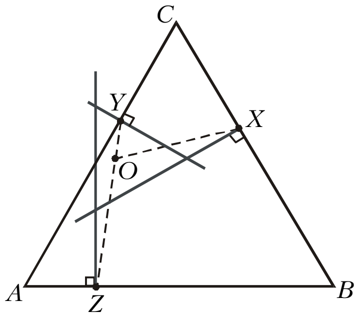

Рис. 16

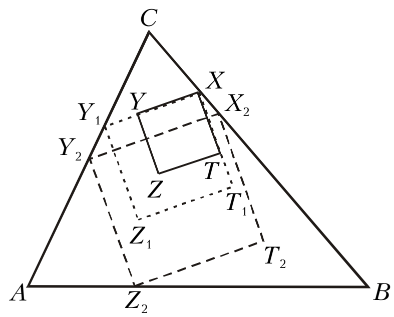

Рис. 17

помешают повороту треугольника ABC вокруг точки O против часовой стрелки.

Упражнение 4. Любителю строгих рассуждений могло показаться, что мы рассмотрели не все возможные расположения точки Y. Придумайте «абсолютно строгое» решение задачи 5, не использующее ни одного чертежа.

Наибольший вписанный квадрат

Докажем напоследок, что все четыре вершины наибольшего квадрата, который можно расположить в данном треугольнике ABC, обязаны лежать на сторонах треугольника. Рассмотрим квадрат, содержащийся в ΔABC. Параллельным переносом одну из вершин X квадрата поместим на границу треугольника (рис. 17). Затем гомотетией с центром X добьемся, что на границе окажутся уже вершины X и Y_1. Гомотетией с центром C сведем дело к случаю, когда три вершины X_2, Y_2 и Z_2 лежат на сторонах треугольника.

Упражнение 5. Завершите доказательство, рассмотрев семейство подобных треугольнику $X_2Y_2Z_2$ треугольников, вписанных в ΔABC.